Nombres complexes

Notations Rappels

- «:=» signifie : on pose.
- Utile : formulaire de trigonométrie.
- Prérequis 1 : fonctions trigonométriques.
- Prérequis 2 : congruences.
- $i\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres imaginaires purs.
- $\mathbf{U} := \{z \in \mathbf{C} \quad |z| = 1\}$

I Forme algébrique

A) Unicité : piège classique

☠ $z = a + ib \not\Rightarrow a + ib$ est la forme algébrique de z.

☠ $a + ib = a' + ib' \overset{☠}{\not\Rightarrow} \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

T₁> Vérifier que a, b (et a', b' le cas échéant sont réels

[Forme algébrique] Déf.1

$z = \mathfrak{Re}(z) + i\mathfrak{Im}(z)$.

Typ. $\mathfrak{Re}(z), \mathfrak{Im}(z)$: Réels

[Unicité de la forme algébrique] Thm.1

Si $a, a', b, b,'$ sont réels :

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

B) Opérations

[♡♡♡ opérations] Thm.2

$\mathfrak{Re}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Re}(z') - \mathfrak{Im}(z)\,\mathfrak{Im}(z')$
$\mathfrak{Im}(zz') = \mathfrak{Im}(z)\,\mathfrak{Re}(z') + \mathfrak{Re}(z)\,\mathfrak{Im}(z')$
Cas particuliers :

- **a.** Si z' est un réel λ (i.e.$\mathfrak{Im}(z') = 0$) :
  - **1)** $\mathfrak{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathfrak{Re}(z)$
  - **2)** $\mathfrak{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathfrak{Im}(z)$
- **b.** Si $z' = i$ (donc $\mathfrak{Re}(z') = 0$) :
  - **3)** $\mathfrak{Re}(iz) = -\,\mathfrak{Im}(z)$
  - **4)** $\mathfrak{Im}(iz) = \mathfrak{Re}(z)$
- **c.** $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ pour $z \neq 0$

T₂> Cette dernière formule permet de calculer la forme algébrique d'un inverse.

T₃> La forme algébrique est adaptée au calculs mettant en jeu des sommes/différences. Son usage est à éviter pour les calculs de produits/quotients.

II Conjugaison

A) Définition

[Conjugué] Déf.2

$\forall z \in \mathbf{C} \quad \bar{z} := \mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)$.

B) Opérations

[Opérations et conjugaison] Thm.3

- **a.** $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- **b.** $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
- **c.** $\forall z \neq 0 \quad \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$
- **d.** $\forall n \in \mathbf{Z} \quad \forall z \in \mathbf{C}^\star \quad \bar{z}^n = \overline{z^n}$

C) Critère de réalité

[critère de réalité] Thm.4

- **a.** $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- **b.** $z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

T₄> Éviter de poser au maximun $z = a + ib$ où a, b sont réels pour établir la réalité de z!

D) Formules d'Euler

[♡♡♡ Formules d'Euler] Thm.5

$\forall z \in \mathbf{C}$:

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\,i}.$$

☠ ☠

T₅> Usages : calculs de puissance, linéarisation, anti-linéarisation

III Module

[module] Déf.3

$\forall z \in \mathbf{C} \quad |z| := \sqrt{z\bar{z}}$ (en effet, $z\bar{z} \in \mathbf{R}_+$)

T₆> Il est toujours mieux de travailler avec $|z|^2$ qui se manipule bien mieux dans les calculs que $|z|$.

[Propriétés du module] Thm.6

Pour z, z' dans $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{Z}$:

- **a.** $z\bar{z} \overset{\text{Thm.2 c)}}{=} |z|^2$
- **b.** $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- **c.** $|-z| = |z|$
- **d.** $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$
- **e.** $|z^n| = |z|^n$ $(z \neq 0)$
- **f.** $|\bar{z}| = |z|$.
- **g.** $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$
- **h.** $|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$
- **i.** $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(\bar{z}z')$
- **j.** $u = \dfrac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$ (pour $z \neq 0$).
- **k.** $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

IV Forme exponentielle

A) Forme trigonométrique/arguments

[forme trigonométrique de $u \in \mathbf{U}$] Thm.7

$|u| = 1 \Leftrightarrow \exists\theta \in \mathbf{R} \quad u = \cos\theta + i\sin\theta$
Dans ce cas, toute solution θ à cette dernière équation s'appelle un argument de u. Ces nombres θ sont les solutions du système :

$$(S)\begin{cases} \cos\theta &= \mathfrak{Re}(u) \\ \sin\theta &= \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$$

Deux solutions quelconques de (S) sont congrues modulo 2π.

T₇> Dans la plupart des cas, on trouve une solution particulière θ_0 de (S) en reconnaissant en $\mathfrak{Re}(u)$ et $\mathfrak{Im}(u)$ des valeurs remarquables du cosinus et du sinus.
☠ On dit *un* argument de u et pas l'argument de u.

[argument principal de u] Déf.4

C'est l'unique solution θ dans $]-\pi, \pi]$ du système (S).

B) Forme exponentielle de $z \in \mathbf{U}$

[notation exponentielle] **Déf.5**

$\forall \theta \in \mathbf{R} \quad e^{i\theta} \overset{\text{notation}}{:=} \cos\theta + i\sin\theta$

[Propriété de la forme exponentielle] **Thm.8**

- **a.** $\forall \theta \in \mathbf{R} \quad \forall k \in \mathbf{Z} \quad e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}$.
- **b.** La fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est injective sur tout intervalle d'amplitude 2π, notamment sur $[0, 2\pi[$, ou $]-\pi, \pi]$.
- **c.** $\forall (\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2 \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
- **d.** $\forall \theta \in \mathbf{R} \quad |e^{i\theta}| = 1$.
- **e.** $\forall \theta \in \mathbf{R} \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
- **f.** *(Formules d'Euler)* $\forall \theta \in \mathbf{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\,i}$$

- **g.** *(Formule de Moivre)* $\forall \theta \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

T_8> La forme trigonomérique des membres de **g.** sont le point de départ de l'anti-linéarisation.

C) Forme exponentielle de $z \in \mathbf{C}^\star$

[arguments de $z \neq 0$] **Déf.6**

Ce sont les arguments de $u = \dfrac{z}{|z|}$.

Ils n'existent pas pour $z = 0$, donc pas de forme exponentielle non plus !

[Notation exponentielle de $z \neq 0$] **Déf.7**

D'après **Thm.5 10.**, **Déf.4** et **Déf.6** :

$$z \overset{\text{Déf. 4}}{=} |z|u \overset{\text{Thm. 7}}{=} |z|e^{i\theta}$$

où θ est un argument de z.

Cette notation n'est pas définie pour $z = 0$!

T_9> Pour trouver la forme exponentielle d'un complexe $z \neq 0$, on factorise z par $|z|$ et on écrit : $z = |z| \times \underbrace{\dfrac{z}{|z|}}_{u}$, et on applique **Thm.7** à u.

[Unicité de la représentation] **Thm.9**

- **a.** $\begin{cases} \rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \\ \theta, \theta' \in \mathbf{R} \\ \rho, \rho' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$
- **b.** Si $z = \rho e^{i\theta}$. Dès lors que $\rho > 0$, et $\theta \in \mathbf{R}$, alors $\rho e^{i\theta}$ est une représentation exponentielle de z.

Ne jamais oublier de vérifier les conditions d'appartenance de $\rho, \rho', \theta, \theta'$ pour appliquer ce théorème. **Surtout, ne pas passer aux logarithmes !**

T_{10}> Le recours à la forme exponentielle est particulièrement adapté à la manipulation de produits, puissances, quotients.

T_{11}> Lorsque l'on parvient à calculer explicitement la forme algébrique et la forme exponentielle de $z \in \mathbf{C}^\star$, l'utilisation de **thm.1** permet d'obtenir des relations non triviales.

D) e^z pour $z \in \mathbf{C}$

[exponentielle] **Déf.8**

$e^z := e^{\mathfrak{Re}(z)} \times e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}$

Typ. $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow e^x \in \mathbf{R}_+^\star$, $e^{iy} \in \mathbf{U}$, $e^{x+iy} \in \mathbf{C}^\star$

T_{12}> Calcul de la forme algébrique de e^{mt}, $m \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{R}$

V Équations polynomiales

A) Équation $z^2 = a$, $a \in \mathbf{C}$

Cette équation possède toujours 2 solutions dans $\mathbf{C}$ en vertu du théorème 7 de la fiche *Algèbre 1 - Polynômes.*

T_{13}> Pour calculer ces solutions :

- Soit on sait mettre a sous forme exponentielle, et on utilise une identité remarquable.
- Soit on ne sait pas, et on peut utiliser la forme algébrique.

[racines carrées] **Déf.9**

Les solutions de l'équation $z^2 = a$ s'appellent les racines carrées de a. Il y en a donc toujours deux (ou une double si $a = 0$).

B) Équation du second degré

[forme canonique] **Déf.10**

$$aX^2 + bX + c \underset{a \neq 0}{=} \underset{\text{facteur d'échelle}}{a} \left[\left(X - \underset{\text{déphasage}}{x_0}\right)^2 + \underset{\text{translation}}{\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)} \right]$$

où $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Les formules du discriminant sont inutiles si $bc = 0$!

C) Relations coefficients-racines

[Relations coefficients-racines] **Thm.10**

La somme des racines du trinôme $aX^2 + bX + c$ vaut $-\dfrac{b}{a}$ et le produit des racines $\dfrac{c}{a}$.

D) Équation $z^n = 1$

[Racines n-èmes de l'unité] **Déf.11**

Soit l'équation : $z^n = 1 \quad (E_n)$ Les solutions de (E_n) s'appellent racines n-èmes de l'unité.

[Racines de l'unité] **Thm.11**

Pour $n \geq 1$, soit $\omega := \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

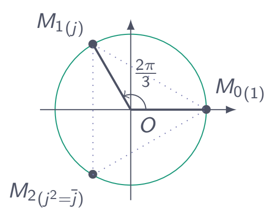
L'équation (E_n) :

- **a.** possède n solutions distinctes.
- **b.** Elles sont de module 1.
- **c.** Ce sont les n nombres $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.
- **d.** $\forall k \in \{0 \dots n\} \quad \overline{\omega^k} = \omega^{n-k}$
- **e.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$

Résultats pas à connaître mais classiques :

T_{14}>

- **a.** Le cas particulier $n = 3$ est bon à connaître car il apparaît souvent à l'écrit. Dans ce cas ω est noté j (qui n'est pas le j de l'électricité !) et vaut $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



- **b.** De l'équation (E_n), on déduit les solutions de l'équation $z^n = a$ où a est un complexe donné dès lors que l'on connaît une solution particulière z_0.