# Trigonométrie

**Rappels**

- Rien ne vaut une approche géométrique pour comprendre tout cela.
- Si $E = \{x_1, x_2, \dots\}$, alors : $x \in E \Leftrightarrow x = x_1$, ou $x = x_2$ ou …

## I Congruences

### A) Réseau de R

*[réseau de R]* **Déf.1**

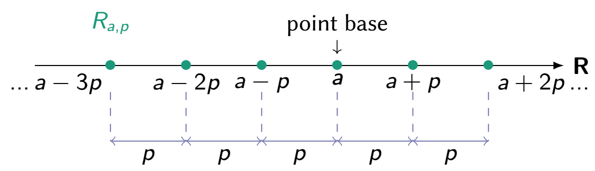
Soit $a \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}_+^\star$. Réseau de point base $a$, et de pas $p$ :

$$R_{a,p} := \{a + kp \quad a \in \mathbf{Z}\} =: a + p\mathbf{Z}.$$

**Typ.** $a + p\mathbf{Z}$ n'est pas une somme. C'est une notation pour un ensemble.

$R_{a,p}$ est l'ensemble des points régulièrement espacés sur $\mathbf{R}$ de la longueur $p$ en partant de $a$. Il contient en particulier les termes de la suite arithmétique de premier terme $a$ et de pas $p$.

**Rem.1** | Géométriquement, on déduit $R_{a,b}$ en partant du réseau $\mathbf{Z} = R_{0,1}$, puis on renormalise ce réseau par changement d'échelle de facteur $p$. On obtient donc le réseau $R_{0,p}$. Enfin, on recentre en $a$ par translation ce dernier réseau.




### B) Congruence

*[congruence]* **Déf.2**

Le réel $b$ est congru à $a$ modulo $p \Leftrightarrow b \in R_{a,p}$. On note alors : $b \equiv a\ [p]$ ou $b = a\ [p]$. Ainsi :

$$b \equiv a\ [p] \Leftrightarrow b \in R_{a,p}$$

**Typ.** $\in$ La relation de congruence traduit donc une relation d'appartenance.

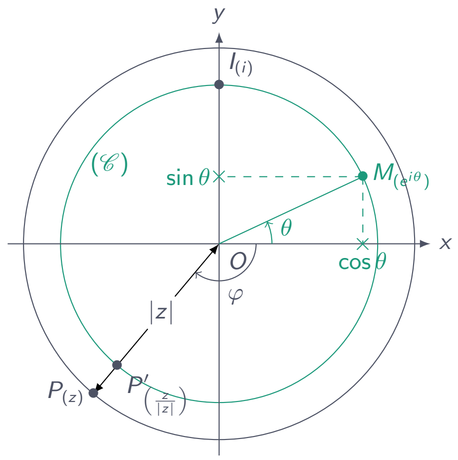
*[propriétés]* **Thm.1**

**a.** $\forall r \in \mathbf{R} \quad a \equiv b\ [p] \Leftrightarrow a + r \equiv b + r\ [p]$

**b.** $\forall r \in \mathbf{R}^\star \quad a \equiv b\ [p] \Leftrightarrow \frac{a}{r} \equiv \frac{b}{r}\ \left[\frac{p}{r}\right]$

C'est une conséquence directe de la remarque 1.

## II Cercle trigonométrique : mode d'emploi




**a.** $(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique. Son rayon est 1.

**b.** (*Coordonnées*) **Typ.** Couple de réels Un point du plan $P(x, y)$ est aussi déterminé de façon équivalente par le nombre complexe $z = x + iy$, appelé dans ce contexte l'affixe de $P$ **Typ.** Nombre complexe. On précise alors cette correspondance sur le dessin en notant : $P = P_{(z)}$ au lieu de $P(x, y)$.

**c.** Sur le dessin, on ne voit pas de nombres complexes, mais simplement leurs parties réelle et imaginaire à travers les abscisses et les ordonnées des points dont ils sont les affixes. **Typ.** Par exemple : le complexe $i$ ne figure pas sur le dessin, mais plutôt le point $I$ (et dont l'affixe est $i$, nuance !).

**d.** (*angle*) **Typ.** objet géométrique. La mesure d'un angle se lit à travers l'ouverture de ce dernier. Cette dernière est quantifiée par le nombre $\varphi$ **Typ.** nombre réel. Il n'est pas unique, mais défini seulement *modulo* $[2\pi]$ (c'est-à-dire à un multiple entier de $2\pi$ près).

**e.** (*Autre interprétation de la mesure de l'angle*). Le réel $\frac{\varphi}{2\pi}$ mesure le nombre de tours effectués sur $(\mathscr{C})$ en partant de $A$ sur la figure pour arriver sur $P$. C'est pourquoi deux (mesures d')angle comme $\varphi$ ou $\gamma \in R_{\varphi,2\pi}$ aboutissent au même point sur $(\mathscr{C})$.
Il est trompeur, comme on peut le voir dans certains livres ou formulaires, de placer sur la figure le réel $\theta$ à la place du point $M$.

**f.** (*Coordonnées polaires*) Si $P$ est distinct de $O$, on peut le repérer par le couple $(r, \varphi)$, $r > 0$ mesurant la distance $OP$, ainsi que $\varphi$ l'ouverture de l'angle formé entre les demi-droites $[Ox)$ et $[OP)$.

**g.** (*Lien entre forme algébrique et exponentielle*) La correspondance $P(x, y) \quad \leftrightarrow \quad (|z|, \varphi)$ se fait par :


CC BY NC SA

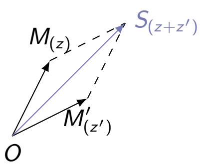
$$\begin{cases} x = |z|\cos\varphi \\ y = |z|\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{donc } z \begin{aligned}[t] &= x + iy \\ &= |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi \\ &= |z|e^{i\varphi} \end{aligned}$$

**h.** $P_{(z)} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z| = 1$. Exemple : $M \in \mathscr{C}$. Dans ce cas, $z$ (et donc $M$) est déterminé par $\theta$ et on note $z = e^{i\theta}$.

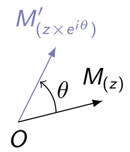
**i.** Le changement d'échelle $z \mapsto \dfrac{z}{|z|}$ induit la transformation $P \mapsto P'$ (puisque $|z| \mapsto 1$). Elle permet de ramener tout complexe non nul à un complexe de module 1 en préservant les arguments.

## III Opérations sur les nombres complexes et interprétation géométrique

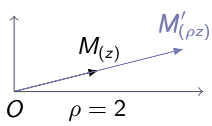
A) somme



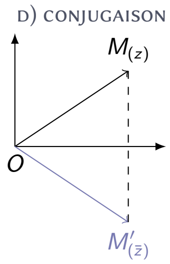

B) multiplication par $e^{i\theta}$




C) multiplication par $\rho > 0$




D) conjugaison




## IV Formulaire de trigonométrie

### A) Périodicité

Avec les notations de **IA)** :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \begin{cases} \forall t \in \mathbf{R} & \cos(t + 2n\pi) = \cos(t) \\ \forall t \in \mathbf{R} & \sin(t + 2n\pi) = \sin(t) \\ \forall t \in \mathbf{R} \setminus R_{\frac{\pi}{2},\pi} & \tan(t + n\pi) = \tan(t) \end{cases}$$

### B) Parité

Avec les notations de **IA)** :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \begin{cases} \forall t \in \mathbf{R} & \cos(-t) = \cos(t) \\ \forall t \in \mathbf{R} & \sin(-t) = -\sin(t) \\ \forall t \in \mathbf{R} \setminus R_{\frac{\pi}{2},\pi} & \tan(-t) = -\tan(t) \end{cases}$$

**Rem.2** | Plus expicitement : $R_{\frac{\pi}{2},\pi} = \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2} \quad k \in \mathbf{Z} \right\}$

### C) Valeurs remarquables

| $t =$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos t$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ |
| $\sin t$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| $\tan t$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\times$ |

$\boxed{T_1>}$ Les valeurs remarquables de ces fonctions pour des valeurs négatives de $t$ se déduisent par propriétés de parité.

**Ultra utile**

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus R_{\pi/2,\pi} \quad \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$$

### D) Translations

Ajouter $\pi/2$ dans un sinus ou un cosinus revient à le dériver. Retrancher $\pi/2$ dans un sinus ou un cosinus revient à le primitiver :

$$\begin{aligned} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin t \\ \cos(t + \pi) &= -\cos t \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos t \\ \sin(t + \pi) &= -\sin t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin t \\ \cos(t - \pi) &= -\cos t \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos t \\ \sin(t - \pi) &= -\sin t \end{aligned}$$

### E) Formules d'addition

*Dans tout ce qui suit $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ sont des réels quelconques.*

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{aligned}$$

### F) Formules de duplication

Déduites des formules d'addition.

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \end{aligned}$$

### G) Formules de linéarisation

Déduites des formules de duplication.

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

### H) Angle moitié

$\boxed{T_2>}$ Considérer $Z_\pm = e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$ et appliquer **III a)**

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta &\overset{\mathfrak{Re}(Z_+)}{=} 2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2] \\ \sin\alpha + \sin\beta &\overset{\mathfrak{Im}(Z_+)}{=} 2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2] \\ \sin\alpha - \sin\beta &\overset{\mathfrak{Re}(Z_-)}{=} 2\sin[(\alpha-\beta)/2]\cos[(\alpha+\beta)/2] \\ \cos\alpha - \cos\beta &\overset{\mathfrak{Im}(Z_-)}{=} -2\sin[(\alpha-\beta)/2]\sin[(\alpha+\beta)/2]\,. \end{aligned}$$


CC BY-NC-SA