Polynômes

Notations Rappels

- $:=$ signifie «égal par définition».
- $\mathbf{K}$ désigne soit $\mathbf{R}$, soit $\mathbf{C}$.
- $\mathbf{K}[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes à valeurs dans $\mathbf{K}$.
- Si $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbf{K}[X]$ de degré **au plus** n.
- $\sup \varnothing = -\infty$ (plus petit majorant de $\varnothing$)
- $P^{(k)}$ désigne le polynôme dérivé d'ordre k de P.

I Généralités

A) Polynômes

a. Soit $k \in \mathbf{N}$. On pose :

Typ. fonction $X^k \quad : \quad \begin{array}{l} \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K} \\ t \mapsto t^k \end{array}$

Ainsi :
$\forall t \in \mathbf{K} \quad X^k(t) = t^k$.

b. La fonction X^0 est notée 1 et est une fonction *constante*.

c. Il est donc *interdit* d'utiliser X comme nom de variable, ou d'inconnue dans la recherche des racines d'un polynôme.

T1> En pratique on écrit : «Soit $z \in \mathbf{K}$. On résout l'équation $P(z) = 0$»

d. *[Monôme]* **Déf.1**
Fonction $t \mapsto at^k$ où $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{K}^\star$.

e. La fonction nulle n'est pas un monôme.

f. *[Polynôme]* **Déf.2**
Combinaison linéaire de monômes :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{\text{coefficients de } P} X^k, \quad a_k \in \mathbf{C} \tag{1}$$

g. Ce n'est pas pour autant que l'on a $\deg(P) = n$: il faut absolument prouver que $a_n \neq 0$ pour cela.

B) Unicité

[Principe d'identification] **Thm.1**
Soit $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$.
- $P = Q \Leftrightarrow P$ et Q ont mêmes coefficients.
- En particulier : $P = 0 \Leftrightarrow$ les coefficients de P sont tous nuls.

Vérifier que l'on a bien une égalité de fonctions avant d'appliquer ce théorème.

C) Degré

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $E \overset{(1)}{:=} \{k \in \mathbf{N} \quad a_k \neq 0\}$.

[degré, dominant] **Déf.3**
$d := \sup E \overset{\text{Notation}}{=} \deg(P)$. Typ. pas entier !

a. $d = -\infty \Leftrightarrow E = \varnothing$.

b. Si $d \in \mathbf{N}$:

1) $a_d X^d$: s'appelle terme dominant de P Typ. monôme
2) a_d s'appelle coefficient dominant/directeur de P Typ. scalaire
3) $a_d = 1$: P est dit normalisé/unitaire.

Le polynôme nul est de degré $-\infty$. Les polynômes constants (sauf le polynôme nul) sont de degré 0.

T2> Il est souvent nécessaire de distinguer le cas du polynôme nul dans les considérations de degré.

II Opérations

A) Définitions

Soit $P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q := \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, $\lambda \in \mathbf{K}$

- Somme : $P + Q := \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) X^k$
- Facteur d'échelle : $\lambda P := \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$
- Produit : $PQ := \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ où
$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}$$

T3> En pratique, on peut calculer le produit en posant la multiplication usuelle.

T4> Formule d'usage théorique, mais aussi utile pour l'obtention notamment de relations combinatoires.

- Composition : $P(Q) := P \circ Q$. Typ. fonction En particulier $P(X) = P$.

T5> Opération très utilisée dans le contexte des espaces vectoriels de polynômes.

- Polynôme dérivé : $P' \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_{k-1} X^{k-1}$
- Le quotient de deux polynômes n'est pas un polynôme en général.

B) Opérations et degré

Soit $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cup \{-\infty\}$, et $\lambda \in \overline{\mathbf{K}}$. On pose :
- $-\infty + \lambda = \lambda + (-\infty) := -\infty$
- $-\infty \times \lambda = \lambda \times (-\infty) := -\infty$.
- $\forall \lambda \in \overline{K} \quad \lambda \geq -\infty$.

Soit P de degré n et Q de degré m.

R =	deg(R) =
$P + Q$	$\max(m, n)$ si $m \neq n$, sinon $\leq n$
λP	n si $\lambda \neq 0$, $-\infty$ sinon
$P \times Q$	$m + n$
$P(Q)$	mn
P'	$n - 1$ si $n > 0$, $-\infty$ sinon

La première ligne du tableau justifie l'introduction de l'ensemble $\mathbf{K}_n[X]$

T6> Pour les calculs de degré, penser à n'introduire que l'information utile dans les expressions algébriques sous peine de s'embourber.

III Racines

A) Racine (ou zéro)

[Racine] **Déf.4**
$a \in \mathbf{K}$ est racine de $P \in \mathbf{K}[X]$
$\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \quad P(a) = 0$
Typ. scalaire

T7> En dehors des équations du premier ou second degré (éventuellement déguisées), ou dans le cas de racines évidentes, il est vain de chercher toutes les racines d'un polynôme sans indications.

[Racine et factorisation] **Thm.2**

a est racine de P
$\Leftrightarrow \exists R \in \mathbf{K}[X] \quad P = (X-a)R.$

B) RACINE MULTIPLE

[a est racine de P d'ordre r] **Déf.5**

Soit $r \in \mathbf{N}^*$, $a \in \mathbf{K}$, $P \in \mathbf{K}[X]$. a est racine d'ordre r de P si et seulement si :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} C_0) & P^{(0)}(a) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_{r-1}) & P^{(r-1)}(a) = 0 \end{array}\right\} r \text{ annulations} \\ C_r) \quad P^{(r)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

a. Pour montrer qu'un polynôme admet une racine d'ordre r, il y a donc exactement $r+1$ conditions à vérifier.

b. Si seules les r conditions $C_0, \dots C_{r-1}$ sont vérifiées, le nombre a est racine de P d'ordre au moins r seulement.

[Racines multiples et factorisation] **Thm.3**

Le nombre a est racine d'ordre de r de P
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists R \in \mathbf{K}[X] \quad P = (X-a)^r R & (a) \\ R(a) \neq 0 & (b) \end{cases}$$

a. En français : a est racine d'ordre de r de P siginie : on peut factoriser P par $(X-a)^r$ et pas plus.

T8> Ce théorème, qui généralise le précédent au cas $r > 1$, établit l'équivalence entre la factorisation de P et la résolution de l'équation $P(z) = 0 \quad z \in \mathbf{C}$. Ainsi la factorisation d'un polynôme consiste essentiellement en la recherche de ses racines.

b. Noter que $(a) \Leftrightarrow (C_0 \dots C_{r-1})$ et que $(b) \Leftrightarrow C_r$. Si il manque une de ces conditions, l'équivalence n'est pas vraie.

T9> Il suit aussi de ce théorème que P divise Q (c-à-d Q se factorise par P) si et seulement si toute racine complexe de P est racine de Q avec multiplicité moindre.

[Évaluation et conjugaison] **Thm.4**

Si $a \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$ alors :

$$\overline{P(a)} = \bar{P}(\bar{a})$$

$\bar{P}$ est le polynôme déduit de P en remplaçant les coefficients de P par leurs conjugués.

[Racines et complexes conjugués] **Thm.5**

Si $P \in \mathbf{R}[X]$ et a est une racine non réelle de P alors $\bar{a}$ est racine de P avec la même multiplicité.

IV FACTORISATION

A) EXISTENCE DE RACINES

[D'Alembert] **Thm.6**

Si P est non constant, P a au moins une racine dans $\mathbf{C}$.

Ce théorème est existentiel : il ne dit rien sur comment calculer les racines.

B) NOMBRE DE RACINES

[Nombre de racines et degré] **Thm.7**

- Un polynôme de degré n possède au plus n racines distinctes.
- Tout polynôme de degré n possède exactement n racines dans $\mathbf{C}$ à condition de les répéter autant de fois que leur multiplicité.

T10>

- La forme factorisée dans $\mathbf{C}$ de P de degré $n > 0$ est :

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{m} (X - z_k)^{r_k} \tag{2}$$

où $z_1, \dots, z_m$ sont les m racines distinctes de P, $r_1, \dots, r_m$ leurs multiplicités respectives et α son coefficient dominant. En particulier, comme $r_1 + \cdots + r_m = n$, si on a trouvé exactement r racines distinctes, on a toutes les racines de P et au coefficient dominant près, la factorisation de P est achevée.

- Si $P \in \mathbf{R}[X]$ et si l'on ne veut faire apparaître que des facteurs dans $\mathbf{R}[X]$ dans la décomposition ci-dessus, on regroupe les racines complexes conjuguées et on obtient :

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{s} (X - x_k)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^{t} (X^2 - 2\,\mathfrak{Re}(z_k)X + |z_k|^2)^{\beta_k}$$

où $x_1, \dots, x_s$ sont les s racines réelles de P, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ leurs multiplicités respectives, $z_1 \dots z_t$ les racines non réelles de partie imaginaire strictement positive et $\beta_1 \dots \beta_m$ leurs multiplicités respectives. Les polynômes du type $(X - z_k)$ sont appelés polynômes irréductibles sur $\mathbf{C}$.

Rem.1

a. Les polynômes apparaissant dans la décomposition ci-dessous sont appelés polynômes irréductibles sur $\mathbf{R}$ car, soit on ne peut plus les factoriser (ils sont de degré 1), soit ils sont factorisables encore mais les facteurs que l'on ferait apparaître ne seraient plus à coefficients réels.

b. On a bien entendu la relation $n - s = 2t$.

Toujours veiller à ne pas oublier le coefficient dominant dans la factorisation.

[Nullité d'un polynôme] **Thm.8**

- Si P est de degré n et s'annule en r nombres distincts tels que $r > n$, alors P est nul.
- Si P s'annule une infinité de fois, alors P est nul.
- Si P s'annule sur un intervalle non réduit à un point, P est nul.

T11> Résultats très utiles pour établir l'égalité de deux polynômes.

C) FACTORISATIONS CLASSIQUES

a. Polynômes du premier degré.

b. Polynômes du second degré à coefficients réels.

c. Factorisation de $X^2 - a \quad a \in \mathbf{C}$.

d. Factorisation dans $\mathbf{C}$ de $X^n - 1$.

D) RELATIONS COEFFICIENTS-RACINES

a. Si $P = aX^2 + bX + c$ est un trinôme, la somme s et le produit p de ses racines sont reliés aux coefficients de P par les formule : $s = -b/a$ et $p = c/a$

b. En particulier, si $P \in \mathbf{R}[X]$, et si les racines sont non réelles (mettons z et $\bar{z}$), $s = z + \bar{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$ et $p = z\bar{z} = |z|^2$.

T12> Formules particulièrement utiles pour :

a. Trouver la deuxième racine d'un trinôme connaissant la première.

b. Savoir si les racines sont réelles sans calculer Δ (en effet $\Delta < 0 \Rightarrow p > 0$)

c. Développer rapidement un trinôme.