Systèmes linéaires

Notations

- $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- n : nombre d'équations.
- p : nombres d'inconnues dans $\mathbf{K}$, notées $x_1, \dots, x_p$
- r : rang du système.

I Les 3 formes de présentation d'un système

A) Forme complète standard

Soit (S) un système linéaire de n équations p à inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + & \dots & + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & \dots + a_{i,j}x_j + \dots & & = b_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + & \dots & + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

a. $a_{i,j}$: coefficients dus système.

b. $b_1, \dots, b_n$: le second membre.

c. Le second membre ne contient **jamais** d'inconnues : on commencera toujours par présenter un système sous forme complète standard avant de le résoudre.

B) Forme matricielle

(S) se réécrit matriciellement :

$$(E) \quad AX = B$$

a. $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: matrice du système.

b. $X = (x_j) \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$: colonne des inconnues.

c. $B = (b_j) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$: colonne du second membre.

C) Forme réduite

On omet l'écriture des inconnues et des opérateurs : $(A|B)$.

Rem.1

a. Adaptée pour appliquer un pivot partiel ou total.

b. $T_1>$ Il faut savoir passer d'une des trois formes à une autre.

II Généralités

A) Définitions

[Solution] Déf.1

a. Une solution de (S) est une p-liste $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant (S).

b. Résoudre (S), c'est donner **toutes** les solutions de (S).

[Compatible] Déf.2

a. Le système (S) est dit compatible si il admet au moins une solution.

b. Sinon, (S) est dit incompatible.

[Équivalents] Déf.3

Deux systèmes linéaires sont dits équivalents si ils ont les mêmes solutions.

III Cas des systèmes 2×2

A) Déterminant

a. **Donnée.** Un système 2×2 de forme réduite :

$$(S_2) \quad \left(\begin{array}{cc|c} a & b & u \\ c & d & v \end{array}\right)$$

b. **Déterminant du système.** Le nombre $\Delta := ad - bc$. C'est le déterminant au sens des matrices de la matrice du système.

c. **Notation.** Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ son déterminant est noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

[Formules de Cramer] Thm.1

a. Le système (S_2) a une unique solution si et seulement si son déterminant Δ est non nul. Dans ce cas, son unique solution est le couple (x, y) qui se calcule par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\Delta}$$

b. Si $\Delta = 0$, le système est incompatible, ou admet une infinité de solutions paramétrées par une des inconnues (la variable libre du système).

Rem.2

$T_2>$ Approche particulièrement adaptée

a. à la résolution de systèmes 2×2 à paramètres.

b. ou à la détermination des constantes dans la résolution d'une SRL_2 ou une EDL_2.

c. Formules faciles à retenir : on remplace au la colonne des coefficients de l'inconnue qu'on calcule par celle du second membre.

IV Méthode du pivot partiel

A) Pivot

Donnée. Un système linéaire de forme réduite : $(A|B)$.

Lignes du système. Une ligne complète de la forme réduite s'appelle ligne du système (elle correspond à une équation sur la forme complète standard). La i-ème ligne se note ℓ_i.

Pivot d'une équation. Notion qui ne concerne que A et pas B.

[Pivot] Déf.4

Le pivot de la ligne i du système :

a. N'existe pas si la ligne i de A est nulle.

b. Sinon c'est le premier coefficient non nul de la ligne i. Dans ce cas le numéro de la colonne de A portant ce pivot s'appelle **indice** du pivot.

Par exemple :

a. Le pivot de la ligne $(0\ 0\ 0\ 0 \mid 13)$ n'existe pas.

b. Le pivot de la ligne $(0\ 0\ -2\ 1 \mid 1)$ est -2, son indice est 3.

B) Opérations élémentaires . . . .

Opération élémentaire	Notation ($i \neq j$)
O1. Échange de deux lignes	$\ell_i \leftrightarrow \ell_j$
O2. Multiplication par un scalaire non nul	$\ell_i \leftarrow \alpha \ell_i$
O3. Combinaison linéaire de deux lignes	$\ell_i \leftarrow \alpha \ell_i + \beta \ell_j$

[Équivalence par opérations élémentaires] **Thm.2**

Les opérations élémentaires préservent l'équivalence **tant que** toute ligne apparaissant éventuellement de part et d'autre du symbole $\leftarrow$ apparaît avec un coefficient **non nul**.

Exemple	Préserve l'équivalence ?
$\ell_1 \leftarrow \ell_1 + \alpha \ell_2$	oui pour tout α
$\ell_1 \leftarrow \alpha \ell_1 + \ell_2$	oui pour tout $\alpha \neq 0$

C) Méthode du pivot . . . .

Indispensable

[Système échelonné en lignes] **Déf.5**

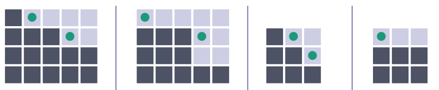
Un système linéaire de n équations $(A|B)$ est dit échelonné si il existe un entier $r \in \{0 \dots n\}$ tel que :

- **a.** Les r premières lignes de A sont non nulles.
- **b.** Les $n - r$ lignes restantes de A sont nulles.
- **c.** La suite des indices des pivots des r premières lignes est strictement croissante.

Exemples. Valeurs de n, p, r.

■ $= 0$ • pivot

Système échelonné dans chaque cas ?

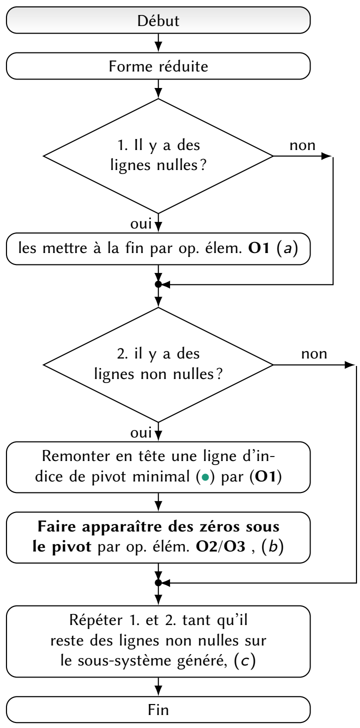


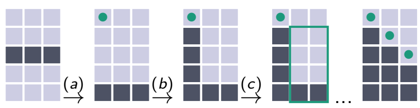
oui	non	oui	oui
$(4, 5, 2)$ (n, p, r)	$(4, 5, \geq 2)$	$(3, 3, 2)$	$(3, 3, 1)$

[Pivot partiel] **Thm.3**

Tout système linéaire est équivalent par opérations élémentaires à un système échelonné en lignes.

$T_3>$ En pratique on applique l'algorithme suivant, illustré ensuite sur un schéma.





D) Rang . . . .

C'est la partie la plus importante

[Invariance du rang - Rang] **Thm.4**

Le nombre de pivots dans toute forme échelonnée équivalente à un système $(A|B)$ donné est toujours le même, et ce, quelles que soient les opérations élémentaires appliquées pour échelonner $(A|B)$. Ce nombre s'appelle rang du système $(A|B)$.

$T_4>$ Pour les systèmes à paramètre :

- **a.** On résout en échelonnant.
- **b.** ☠ **On évite de choisir un pivot dépendant du paramètre**
- **c.** On discute suivant les valeurs du rang pour la remontée.

[Inégalités sur le rang] **Thm.5**

Pour un système de taille n, p le rang r vérifie $r \leq n$ et $r \leq p$. En particulier, si $r = n$: le système a au moins une solution, et si $r = p$, le système a au plus une solution.

[Nombre de solutions] **Thm.6**

Soit $(A|B)$ un système linéaire et $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses solutions. Alors $\text{Card}\, \mathscr{S} \in \{0, 1, \infty\}$.

V Résolution des systèmes échelonnés

[Inconnues principales] **Déf.6**

Soit $(A|B)$ un système échelonné, r sont rang.

- **a.** Les r inconnues correspondant aux colonnes portant les pivots sont appelées inconnues principales.
- **b.** Les $p - r$ autres inconnues s'appellent variables libres ou inconnues secondaires, ou inconnues non principales.
- **c.** Les $n - r$ lignes ne portant aucun pivot s'appellent équations de compatibilité.

$T_5>$ Remontée d'un système échelonné

- **a.** Si une équation de compatibilté n'a pas de solutions, le système est incompatible. Sinon il est compatible.
- **b.** On résout en remontant les équations de la dernière vers la première, et on exprime les inconnues principales en fonction des variables libres.
- **c.** On présente l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ le cas échéant sous forme canonique :

$$\mathscr{S} = \{\mathbf{u_0} + t_1 \mathbf{u_1} + \cdots + t_{p-r} \mathbf{u_{p-r}} \quad t_i \in \mathbf{K}\}.$$

Dans cette écriture :

- $\mathbf{u_0}$ est une $p-$liste ne contenant que des constantes ($\mathbf{u_0} = (0, \dots, 0)$ si le système est homogène).
- $t_1, \dots, t_{p-r}$ sont les $p - r$ variables libres du système (et donc $\mathscr{S}$ est un singleton quand $r = p$).
- $\mathbf{u_k}$ est une p − *liste* ayant toujours un 1 en position égale au numéro de la variable libre t_k (p.ex : si $t_3 = x_4$, il y a un 1 en position 4 dans $\mathbf{u_3}$).

[Système de Cramer] **Déf.7**

C'est un système carré (c'est-à-dire pour lequel $n = p$) et ayant une unique solution : $n = p = r$.