Espace $\mathbf{K}^n$

Notations

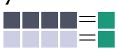
- $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- Un vecteur est noté par une lettre latine minuscule **grasse** ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \dots$)
- Ses composantes sont notées par la même lettre non grasse indicée par un entier ($x_1, x_2, \dots$ ou $y_1, y_2, \dots$)
- ☠ **Attention** : familles de vecteurs. P. ex, $(\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p})$ sont p vecteurs (et pas les p composantes d'un vecteur $\mathbf{u}$).
- La matrice des coordonnées canonique d'un vecteur est notée en remplaçant les minuscules par des majuscules $(X, Y, U, V \dots$ pour resp. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$.
- (*) signifie : terme à connaître.

I À visualiser. À mémoriser

☠ Fondamental pour ne pas confondre lignes et colonnes dans la lecture d'une matrice surtout pour les applications linéaires.

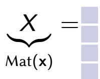
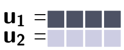
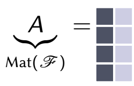
a) Chez les systèmes linéaires

Ligne → équation

Une équation linéaire	Sa matrice $(A\|B)$
	
Un système linéaire	**Sa matrice $(A\|B)$**
	

b) Chez les vecteurs

Colonne → vecteur

Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$	Sa matrice X (des coordonnées)
$\mathbf{x} =$	
Un système de vecteurs $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$	**Sa matrice A**
	

c) Chez les applications linéaires

Lignes → équations/noyau.
Colonnes → vecteurs/image

Voir la fiche consacrée aux applications linéaires.

II Définitions et cadre

a) Vecteurs

[Espace numérique $\mathbf{K}^n$] Déf.1

$\mathbf{K}^n := \{(x_1, \dots, x_n), \quad x_j \in \mathbf{K}, \quad 1 \leq j \leq n\}$.
Le scalaire x_j s'appelle j-ème *composante** du vecteur $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

[Base canonique] Déf.2

C'est la famille de n vecteurs notée $\mathscr{B}_c := (\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n})$ où les vecteurs $\mathbf{e_j}$ sont définis par

$$\mathbf{e_j} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j^e}}{1}, 0, \dots, 0).$$

Ainsi, pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ quelconque : $x = x_1\mathbf{e_1} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$.

b) Matrices de vecteurs

[Matrice d'un vecteur $x \in \mathbf{K}^n$] Déf.3

Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, la matrice de x sur la base canonique, ou matrice des coordonnées canoniques* de $\mathbf{x}$ est par définition :

$$X = \mathrm{Mat}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

Le scalaire x_j s'appelle la j-ème coordonnée canonique* de $\mathbf{x}$ (c'est aussi sa j-ème composante).

[Matrice d'un système de vecteurs] Déf.4

Si $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p})$ est une famille p vecteurs de $\mathbf{K}^n$, la matrice de la famille $\mathscr{F}$ est par définition la matrice

$$A = \mathrm{Mat}(\mathscr{F}) := \begin{pmatrix} U_1 & \dots & U_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

où U_j est la matrice des coordonnées de $\mathbf{u_j}$ (on a donc concaténé les colonnes U_j).

Exple.1

a. la matrice de $\mathscr{B}_c$ est la matrice unité/identité I_n.

b. Soit $\mathbf{u_1} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{u_2} = (2, 0, 1, 0)$, et $\mathbf{u_3} = (1, 1, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbf{C}^4$. La matrice du système de vecteurs $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ sur la base canonique est

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \mathbf{u_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) Résultat essentiel en calcul

[Combinaison linéaire de vecteurs] Déf.5

Soit $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p})$ un système de p vecteurs dans $\mathbf{K}^n$ dont la matrice des coordonnées est $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La combinaison linéaire

$$x = \lambda_1\mathbf{u_1} + \dots \lambda_p\mathbf{u_p} \in \mathbf{K}^n \quad (\lambda_j : \text{scalaires})$$

a pour coordonnées canoniques la matrice X où :

$$X = A \times \Lambda \quad et \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \qquad (1)$$

d'après les règles du produit matriciel.

Rem.1

a. T1> Ce résultat est ultra-utile. Il fait la liaison entre le calcul vectoriel et le calcul matriciel : il permet donc de matricialiser les problèmes géométriques.

b. Si Λ est la colonne nulle, la combinaison linéaire est dite triviale*.

c. Si $A\Lambda$ est la colonne nulle, la combinaison linéaire est dite nulle*.

Exple.2 En reprenant les vecteurs u_j de l'exemple précédent, les coordonnées canoniques du vecteur

$$x := u_1 - u_3 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + (-1) \cdot u_3$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $x = (0, -1, -1, 0)$

Exple.3 Dans $\mathbf{K}^2$: $x = \lambda_1(a, b) + \lambda_2(c, d)$ a pour coordonnées :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

III Familles génératrices

A) Sev engendré

[Vect] Déf.6

$\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est le sev constitué de toutes les combinaisons linéaires des éléments de $\mathscr{F}$. Tout sev G contenant $\mathscr{F}$ contient carrément $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. C'est faux si G n'est pas un sev.

B) Famille génératrice

[Famille génératrice d'un sev] Déf.7

$(\mathscr{F})$ est génératrice d'un sev F de $\mathbf{K}^n$ si $F = \mathrm{Vect}\ (\mathscr{F})$.

[Appartenance à un Vect] Thm.1

a. $u \in \mathrm{Vect}\ (\mathscr{F})$ ssi le système $(A|U)$ est compatible, où A est la matrice de $(\mathscr{F})$.

b. T2> Les équations de compatibilité de ce système de second membre $u \in \mathbf{K}^n$ quelconque donnent des équations de F.

Rem.2 Les opérations suivantes sur une famille génératrice $\mathscr{F}$ d'un sev F préservent son caractère générateur :

a. Renormaliser les vecteurs de $\mathscr{F}$.

b. Virer les vecteurs qui sont combinaisons d'autres vecteurs de la famille.

[Familles génératrices de $\mathbf{K}^n$] Thm.2

la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbf{K}^n$ ssi $\mathrm{rang}(A) = n$, où $A = \mathrm{Mat}(\mathscr{F})$.

Rem.3 En particulier, toute famille génératrice de $\mathbf{K}^n$ contient au moins n vecteurs.

C) Sev de $\mathbf{K}^n$

[Sev de $\mathbf{K}^n$] Thm.3

a. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de p inconnues dans $\mathbf{K}$ est un sev de $\mathbf{K}^p$.

b. Tout Vect est un sev.

Rem.4 Ainsi, toute matrice à p colonnes fournit un sev de $\mathbf{K}^p$ en la lisant en lignes, et toute matrice A à n lignes fournit un sev de $\mathbf{K}^n$ en la lisant en colonnes.

IV Familles libres

[Famille libre - liée] Déf.8

Une famille $\mathscr{F}$ vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est libre si la seule combinaison linéaire nulle de ses vecteurs est la combinaison triviale. Autrement dit avec les notations de (1), si on a : $[A \times \Lambda = 0] \Rightarrow [\Lambda = 0]$. Sinon, la famille est dite liée.

[Familles libres de vecteurs] Thm.4

la famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est libre ssi $\mathrm{rg}(A) = p$ où $A = \mathrm{Mat}(\mathscr{F})$.

Rem.5

a. En particulier, une famille libre de $\mathbf{K}^n$ contient au plus n vecteurs.

b. Toute famille contenant $\{0\}$ est liée.

c. Une famille d'un seul vecteur est libre ssi ce vecteur est non nul.

d. une famille de vecteurs deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre !

V Bases et dimension

A) Bases

[Base d'un sev de $\mathbf{K}^n$] Déf.9

Si F est un sev de $\mathbf{K}^n$, une base de F est une famille $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1} \ldots \mathbf{u_p})$ de vecteurs **libres** de F et **génératrice de** F : $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = F$. Ainsi : $\forall \mathbf{u} \in F \quad \exists!\, (\lambda_1 \ldots \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$ $\mathbf{u} = \underbrace{\lambda_1 \mathbf{u_1} + \cdots + \lambda_p \mathbf{u_p}}_{\text{la décomposition de } \mathbf{u} \text{ sur la base } \mathscr{F}}$.

Le sev $\{0\}$ n'admet pas de base (**Rem.5 b.**).

[Bases de $\mathbf{K}^n$] Thm.5

Une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est une base de $\mathbf{K}^n$ si et seulement si A est inversible, où $A = \mathrm{Mat}(\mathscr{F})$.

[Rigidité] Thm.6

Si F est un sev de $\mathbf{K}^n$ de dimension d et si $\mathscr{F}$ possède exactement d vecteurs, sont équivalents :

a. $\mathscr{F}$ st une base de F

b. $\mathscr{F}$ est génératrice de F.

c. $\mathscr{F}$ est libre.

Rem.6

T3> On trouve une base d'un sev défini par des équations en résolvant ce système d'équations et en présentant ses solutions sous forme canonique.

B) Dimension

[Dimension d'un sous-espace non nul] Déf.10

Soit $F \neq \{0\}$ un sev de $\mathbf{K}^n$ Toutes les bases de F ont même cardinal. Ce cardinal commun se note $\dim F$ est s'appelle la dimension de F.

Rem.7 En particulier $\dim \mathbf{K}^n = n$ (valable même pour $n = 0$), et $\mathbf{K}^0 = \{0\}$.

C) Dimension et inclusion

[relations inclusion-dimension] Thm.7

Si F, G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$, alors :

a. $F \subset G \Rightarrow \dim F \leq \dim G$.

b. $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \subset & G \\ \dim F & = & \dim G \end{array} \right. \Rightarrow F = G$.