Calcul matriciel, rang

Rappels. Notations

- Une matrice est notée par une lettre majuscule (ex : M).
- Son coefficient général est noté par la minuscule correspondante (ex : $m_{i,j}$)
- On écrira : $M = (m_{i,j})$
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$ à n lignes et p colonnes.
- (n, p) s'appelle le **format** de la matrice (et pas sa dimension !)
- Si $n = p$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{K})$

I Matrices remarquables

On est dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

a. Matrice ligne : $n = 1$.

b. Matrice colonne : $p = 1$.

c. Matrice carrée : $n = p$.

d. Matrice diagonale : carrée et $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Notée aussi $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Il peut y avoir des zéros sur la diagonale.

e. Matrice scalaire : matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux. La matrice nulle carrée est scalaire.

f. Matrice unité : matrice scalaire de coefficients diagonaux égaux à 1. Notée I_n.

g. Matrice triangulaire supérieure : $a_{i,j} = 0$ si $i > j$. (zéros sous la diagonale).

h. Matrice triangulaire inférieure : $a_{i,j} = 0$ si $i < j$.

i. Matrice triangulaire : matrice triangulaire inférieure ou supérieure. Les matrices diagonales sont triangulaires.

j. Matrice symétrique : vérifiant $A^T = A$.

II Produit matriciel

A) D'une ligne par une colonne

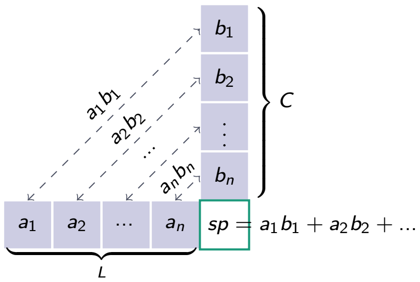
[Somme-produit] **Déf.1**

Si $L = (a_1 \ldots a_n)$ est une ligne de longueur n, et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ddots \\ b_n \end{pmatrix}$ une colonne de hauteur n, la somme-produit LC est par définition le nombre

$$sp = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Rem.1

$\boxed{T_1>}$ En pratique, pour calculer la somme-produit d'une ligne L par une colonne C, on dispose les matrices comme suit, les traits pointillés correspondent à des produits, et on somme ensuite les résultats des produits obtenus :



B) Formule du produit matriciel

[Produit matriciel] **Thm.1**

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et si $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, alors :

a. $C = AB$ existe.

b. $C = AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{K})$.

c. $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, q\}$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Rem.2 Le coefficient $c_{i,j}$ en position (i, j) dans C est la somme-produit de la ligne i de A avec la colonne j de B.

Rem.3 Compatibilité des formats de A et B pour le produit AB :

A	B	AB
(n, p)	(p, q)	(n, q) OK
A	B	AB
(n, p)	(r, q)	(n, q) NON si $p \neq r$

Rem.4

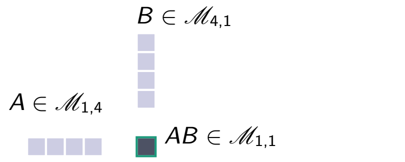
a. La formule ne sert que pour des calculs théoriques ou pour la programmation.

b. Sur les cas pratiques (c-à-d. $n, p, q \leq 5$), on pose le produit matriciel et on effectue des somme-produit (**Déf.1**).

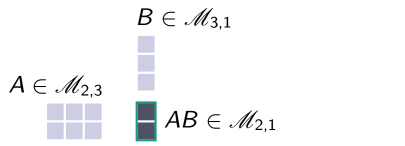
Exple.1 Pour montrer que le produit de deux matrices diagonales est diagonal.

Exple.2 Exemples de produits AB (voir remarques du VI) **Err2**) :

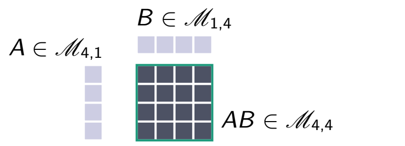
a. Somme-produit



b.



c.



Exple.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a. $AB = (x) \in \mathscr{M}_{1,1}$ où $x = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 11$

b. $BA = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}$

III Puissances de matrices carrées

[Cas particuliers] **Thm.2**

a. $A^0 = I_n$ si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

b. $I_n^k = I_n$ pour tout entier k.

c. $(\lambda I_n)^k = \lambda^k I_n$ (où $\lambda \in \mathbf{K}$).

d. $[\operatorname{diag}(a_1 \ldots a_n)]^k = \operatorname{diag}\left(a_1^k \ldots a_n^k\right)$.

Rem.5 | T2> En dehors de ces cas et sans indication, pour calculer A^k, on peut calculer A^2, A^3, et induire une formule par récurrence, ou décomposer A en $A = B + \lambda_n I$ et appliquer la formule du binôme.

IV Rang d'une matrice

A) Définition

[Rang] **Déf.2**
Rang d'une matrice A : nombre de pivots dans toute matrice échelonnée obtenue après pivot partiel sur A.

Rem.6 | Le rang ne se voit donc pas automatiquement sur une matrice. Il faut en général le calculer.

[Rang de matrices remarquables] **Thm.3**
Si A est triangulaire inférieure, ou supérieure (et *a fortiori* diagonale) le rang de A est égal au nombre de coefficients diagonaux **non nuls** de A.

Exple.4 | **(Spé)** Soit A une matrice carrée, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et supposons-la triangulaire (ou diagonale)

- **a.** Les valeurs propres de Asont ses coefficients diagonaux.
- **b.** Dans ce cas, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ est égale à $n - r$ où r est le rang de $A - \lambda I_n$

[Rang de la transposée] **Thm.4**
A et A^T ont le même rang.

Exple.5 | **(Spé)** A et A^T ont les mêmes valeurs propres, et les sous-espaces propres de A et A^T pour une valeur propre donnée sont de même dimension.

V Inversibilité

A) Définition

[Matrice inversible] **Déf.3**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est inversible si il existe une matrice carrée M **de même format** que A vérifiant l'**une** des deux conditions suivantes :

- **a.** $AM = I_n$
- **b.** $MA = I_n$.

[théorème de l'inverse] **Thm.5**
Si A est inversible, alors :

- **a.** M vérifie les deux conditions précédentes dès que l'une d'elles est vraie. Ainsi : $AM = MA = I_n$,
- **b.** M est unique.
- **c.** M s'appelle **l'** inverse de A.
- **d.** M se note A^{-1}

Rem.7 | T3> Ce théorème est utilisé pour trouver l'inverse d'une matrice A dont on connaît un polynôme annulateur : on trouve une matrice M de même format que A telle que $AM = I_n$

Exple.6 | Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $A^3 - 3A + 2I_n = 0$. Alors on peut écrire en factorisant que : $A \times \left(-\frac{1}{2}(A^2 - 3I_n)\right) = I_n$. On a donc trouvé une matrice M de même taille que A telle que $AM = I_n$. Ainsi A est inversible, et son inverse est M. Il est inutile de vérifier que $MA = I_n$.

B) Caractérisations et calcul d'inverses

[Caractérisation de l'inversibilité] **Thm.6**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Sont équivalents :

- **a.** A est inversible.
- **b.** $\mathrm{rg}(A) = n$.
- **c.** A représente un système de Cramer homogène.
- **d.** Pour tout second membre B le système de forme réduite $(A|B)$ a une unique solution. Dans ce cas, la solution du système $X = A^{-1}B$.

Rem.8 | T4> En pratique, on peut calculer A^{-1} par la méthode du pivot total sur le système $(A|I_n)$. À la fin de la procédure, on arrive à la forme $(I_n|A^{-1})$.

Exple.7 | Utilise le point **b.** du théorème.

- **a.** Si A contient une ligne ou une colonne nulle, elle ne peut être inversible (il manquera au moins un pivot).
- **b.** Si A contient deux lignes égales, elle ne peut être inversible, car par pivot, on fait apparaître une ligne nulle et on revient au cas **a.**
- **c.** Si A contient deux colonnes égales, même conclusion, puisque A^T vérifie le cas **b.** et A et A^T ont même rang.

[calculs d'inverse] **Thm.7**

- **a.** $\mathrm{diag}(a_1 \dots a_n)$ est inversible si et seulement si tous les a_k sont non nuls et son inverse est : $\mathrm{diag}\left(a_1^{-1} \dots a_n^{-1}\right)$.
- **b.** Si A, B sont inversibles, AB aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- **c.** Si A est inversible A^T aussi et $(A^T)^{-1} = ({}^TA^{-1})$

VI Erreurs de calcul courantes

• Err 1. Produit nul :
Ce n'est pas parce que $AB = 0$ que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exple.8 | Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B = A$, A et B sont non nulles, pourtant $AB = A^2 = 0$.

• Err 2. Commutativité
En général $AB \neq BA$ à cause de la compatibilité des formats. Pour que $AB = BA$, il est **nécessaire** que A et B soient carrées de même format.

Exple.9 | Si on prend par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, par calcul que $AB = 0$ alors que $BA = A \neq 0$.

Rem.9 |
a. Les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices.
b. Toute puissance de A commute avec A.

• Err 3. Factorisation de matrices

- **a.** I_n joue dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ le rôle que joue 1 dans $\mathbf{K}$:

Exple.10 | $A^2 - 3A = A(A - 3I_n)$ **et pas** $A(A-3)$ **(qui ne veut rien dire d'ailleurs)**.

- **b.** Prendre garde au problème de la commutativité en factorisant.

Exple.11 | $A - 3BA = (I_n - 3B)A$ **et pas** $A(I_n - 3B)$, **et encore moins** $A(1 - 3B)$ **!**

• Err 2. Puissances de matrices

Exple.12 | Si on part de $D = P^{-1}AP$, ou P, DA, sont carrées de même format, alors :

$$\begin{aligned}
PD &= PP^{-1}AP \\
PD &= I_nAP \text{ car } PP^{-1} = I_n \\
PD &= AP \text{ car } I_nA = A \\
PDP^{-1} &= APP^{-1} \\
PDP^{-1} &= AI_n \text{ car } P^{-1}P = I_n \\
PDP^{-1} &= A \text{ car } AI_n = A
\end{aligned}$$

Exple.13 |
Si pour tout entier n, on a $X_{n+1} = AX_n$, alors $\forall n \in \mathbf{N} \quad X_n = \underbrace{A^nX_0}_{\text{dans cet ordre!}}$.