Applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$

Rappels. Notations

- L'ensemble des applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ est noté $\mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$.
- Si $n = p$, on note $\mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ au lieu de $\mathscr{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^n)$.
- La base canonique de $\mathbf{K}^p$ est notée $\mathscr{B}_c$.

I Vocabulaire

a. Une application linéaire est appelée homomorphisme.

b. Une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans lui-même est appelée endomorphisme.

c. Un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ de surcroît bijectif est appelé automorphisme.

II Matrice d'une application linéaire : mode d'emploi

A) Définition

[Matrice d'une application linéaire] **Déf.1**

Notons $\mathscr{B}_c = (\mathbf{e_1}, \dots \mathbf{e_p})$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, la matrice de f sur les bases canoniques[a] de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ est la matrice notée $\mathrm{Mat}(f)$ et définie par :

a. $\mathrm{Mat}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

b. Pour tout entier j, la j-ème colonne de $\mathrm{Mat}(f)$ contient les coordonnées canoniques de $f(\mathbf{e_j})$.

a. ou la matrice de f tout court.

Rem.1 | Définie ainsi, la matrice d'une application linéaire si lit en **colonnes**.

Exple.1 | Notons $A = \mathrm{Mat}(f)$

A	$f \in$
	$f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^4, \mathbf{K}^2)$
	$f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^3, \mathbf{K}^4)$
	$f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^3)$

Exple.2 | Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A représente une application linéaire de $\mathscr{L}(\mathbf{K}^3, \mathbf{K}^4)$. En notant $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ la base canonique de $\mathbf{K}^3$, on lit que :

- $f(\mathbf{e_1}) = (1, 1, 1, 1) \in \mathbf{K}^4$
- $f(\mathbf{e_2}) = (2, 0, 2, 1) \in \mathbf{K}^4$
- $f(\mathbf{e_3}) = (3, 1, 2, 1) \in \mathbf{K}^4$

B) Calcul de $f(\mathbf{x})$

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, $A = \mathrm{Mat}(f)$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^p$ et $X = \mathrm{Mat}(\mathbf{x})$ (rappel : $X = \mathbf{x}^T$). Alors $\mathrm{Mat}(f(\mathbf{x})) = AX$.

Exple.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = (1, -1, 2) \in \mathbf{K}^3$.

Alors $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On obtient $f(\mathbf{x})$ en calculant le produit matriciel AX : $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $f(\mathbf{x}) = (5, 3, 3, 2)$.

C) Lecture de la matrice en lignes

Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$, pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$,la i-ème ligne de A donne la i-ème coordonnée de $f(\mathbf{x})$.

Exple.4 | Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbf{K}^3$, les coordonnées de $f(\mathbf{x})$ sont données par :

$f(\mathbf{x}) = (\underbrace{x + 2y + 3z}_{\text{ligne 1 de } A}, \dots, \underbrace{x + y + z}_{\text{ligne 4 de } A})$

III Image et noyau. Rang

A) Défintions

[image d'un homomorphisme] **Déf.2**

Si $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, l'image de f est l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{K}^p\}$$

C'est un sev de $\mathbf{K}^n$.

Rem.2 | C'est un ensemble défini paramétriquement.

[Rang d'une application linéaire] **Déf.3**

C'est la dimension de son image.

[noyau d'un homomorphisme] **Déf.4**

Si $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, le noyau de f est l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{K}^p \quad f(\mathbf{x}) = 0\}$$

C'est un sev de $\mathbf{K}^p$.

Rem.3 | C'est un ensemble défini par équations.

B) Théorème du rang

[Théorème du rang] **Thm.1**

Si $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ alors : $p = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f$

Rem.4 |

T1> Très utile pour des petites matrices : le rang de f se devine parfois assez facilement, ce qui permet d'en déduire la dimension du noyau de f, et même parfois une base du noyau en combinant judicieusement les colonnes de A.

C) Surjectivité et injectivité

[Surjectivité] **Déf.5**

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$. On dit que f est surjective si et seulement pour tout second membre $\mathbf{y} \in \mathbf{K}^n$, il existe au moins une solution $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^p$ à l'équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

[Injectivité] **Déf.6**

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$. On dit que f est injective si et seulement pour tout second membre $\mathbf{y} \in \mathbf{K}^n$, il existe au plus une solution $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^p$ à l'équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

CC BY NC SA

IV Propriétés de l'image et du noyau. Calcul

[Propriétés de l'image] **Prop.1**

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ et A sa matrice.

a. $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(f(\mathbf{e_1}), \dots, f(\mathbf{e_p}))$.

b. $\mathrm{Im}f$ est un sev de $\mathbf{K}^n$.

c. Une famille génératrice de $\mathrm{Im}f$ est donnée par les colonnes de A.

d. $\dim \mathrm{Im}\ f = \mathrm{rang}(A)$, ainsi le rang de f et celui de A.

e. Une base de $\mathrm{Im}f$ s'obtient en extrayant une base des colonnes de A.

f. Un système d'équations de $\mathrm{Im}f$ est donné par les équations de compatibilité du système :

$$\left(\begin{array}{c|c} & x_1 \\ A & \vdots \\ & x_n \end{array}\right)$$

g. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}f = \mathbf{K}^n$.

h. f est surjective si et seulement si $\mathrm{rang}(A) = n$.

Exple.5 | Si f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^3, \mathbf{K}^2)$.

- Visiblement, le rang r de A est 1 (il y a une ligne non nulle donc $r \geq 1$, et les deux lignes de A sont proportionnelles, donc $r < 2$. Ainsi la dimension de Im f est 1 (point **d.**)
- Comme Im f =Vect$(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$, où $\mathbf{u} = (1, 2)$ (point **a.**), la famille $(\mathbf{u})$ est une base de Im f (point **e.**).
- Enfin, f n'est pas surjective puisque son rang n'est pas 2 (point **h.**)
- Un système d'équations de l'image est donné par les équations de compatibilité du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 2 & y \end{array}\right)$$

$$\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{y-2x} \end{array}\right)$$

c'est-à-dire (point **f.**) : $2x - y = 0$.

[existence de surjections linéaires] **Cor.1**

Si $p < n$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ ne peut être surjective.

Rem.5 | En effet, dans ce cas d'après les inégalités sur le rang, $r \leq p$, donc $r < n$.

[Propriétés du noyau] **Prop.2**

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ et A sa matrice.

a. Un système d'équations de $\mathrm{Ker}f$ est donné par le système linéaire homogène : (H) $\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \end{array}\right)$

b. $\mathrm{Ker}f$ est un sev de $\mathbf{K}^p$.

c. Une base de $\mathrm{Ker}f$ est obtenue en résolvant le système linéaire (H).

d. $\dim \mathrm{Ker}\ f = p - \mathrm{rang}(A)$ (c'est le nombre de variables libres du système (H)).

e. f est injective si et seulement si $\mathrm{rang}(A) = p$.

f. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$.

Exple.6 | Si on reprend f dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- D'après le théorème du rang (**Thm. 1** ou point **d.**), et le fait que le rang de f est 1, $\ker f$ est de dimension $3 - 1 = 2$.
- Ainsi f n'est pas injective (point **f.**)
- Un système d'équations du noyau est $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{cases}$ (point **a.**)
- Une base du noyau s'obtient en résolvant ce système (point **c.**), ou en trouvant deux vecteurs libres du noyau par le point précédent. Or on voit que dans A : col1=col2, donc col1-col2=0, c'est-à-dire $f(\mathbf{e_1}) - f(\mathbf{e_2}) = 0$, (voir **Déf. 1.**), soit, par linéarité : $f(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}) = 0$. Ainsi $\mathbf{v} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} = (1, -1, 0)$ est dans le noyau. De même, en notant que col1=col3, $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ est dans le noyau. Comme $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont non colinéaires, il forment une base de ker f.

[existence d'injections linéaires] **Cor.2**

Si $p > n$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ ne peut être injective.

Rem.6 | En effet, dans ce cas d'après les inégalités sur le rang, $r \leq n$, donc $r < p$.

V Bijectivité

[Injectivité] **Déf.7**

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$. On dit que f est bijective si et seulement pour tout second membre $\mathbf{y} \in \mathbf{K}^n$, il existe une unique solution $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^p$ à l'équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Rem.7 | Cela signifie que f est à la fois injective et surjective.

[Caractérisation de la bijectivité] **Thm.2**

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$.

a. Si $p \neq n$, f ne peut être bijective.

b. Si $p = n$ (donc f est un endomorphisme), sont équivalents :

1) f est bijective.

2) f est injective et surjective.

3) f est injective ou surjective.

c. Si f bijective de matrice A, sa bijection réciproque f^{-1} est aussi linéaire, et a pour matrice A^{-1} : $\mathrm{Mat}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}(f))^{-1}$

VI Changement de base pour les endomorphismes ($n = p$)

a) Définition

[Matrice d'un endomorphisme sur une autre base] **Déf.8**

Si $\mathscr{B}' = (\epsilon_1 \dots \epsilon_n)$ est une base de $\mathbf{K}^n$, et f un endomorphisme de $\mathbf{K}^n$, la matrice de f sur la base $\mathscr{B}'$ est la matrice dont la j-ème colonne est la matrice des coordonnés de $f(\epsilon_j)$ sur la base $\mathscr{B}'$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\epsilon_1) & \dots & f(\epsilon_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \text{décomposé sur} \\ \\ \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{array}$$

Rem.8 | Ainsi le schéma ci-dessus s'applique aussi à la définition **Déf.1** avec $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_c$ (et donc $\epsilon_j = \mathbf{e_j}$)

[Deuxième formule du changement de base] **Thm.3**

Mêmes notations que dans la définition **Déf. 8**. Soit A la matrice de f, A' la matrice de f sur la base $\mathscr{B}'$, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}'$. Alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Rem.9 |

$T_{2>}$ En pratique, on ne calcule pas A' par le produit matriciel ci-dessus, mais essaie de trouver la décomposition des $f(\epsilon_j)$ sur $\epsilon_1 \dots \epsilon_n$ pour obtenir A'.

CC BY NC SA