Suites, sommes et produits classiques

Rappels

- Typ. (u_n) : suite = liste de nombres
- Typ. u_n : nombre = le terme en position n dans la liste (u_n).
- Une somme indexée sur $\varnothing$ vaut 0.
- Un produit indexé sur $\varnothing$ vaut 1.
- Essayer de prouver les formules pour les comprendre et les mémoriser !

I Suites récurrentes à un pas

A) Suites arithmétiques

[suite arithmétique (p : entier donné)] **Déf.1**

a. Premier terme : $u_p \in \mathbf{C}$.
Raison (ou pas de la suite) : $r \in \mathbf{C}$.

b. Relation de récurrence :

$$\forall n \geq p \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

c. Forme explicite :

$$\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

Exemples. $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_n = n$, ou $u_n = 2n$, ou $u_n = 2n+1$.

B) Suites géométriques

[suite géométrique, (p : entier donné)] **Déf.2**

a. Premier terme : $u_p \in \mathbf{C}$. Raison/-pas : $r \in \mathbf{C}$.

b. Relation de récurrence :

$$\forall n \geq p \quad u_{n+1} = q \times u_n \quad (G_q)$$

c. Forme explicite :

$$\forall n \geq p \quad u_n = q^{n-p} \times u_p.$$

Rem.1 L'ensemble des suites vérifiant la relation (G_q) est un s-ev de l'ensemble des suites (définies à partir du rang p).

Exemples de base. $u_n = (-1)^n$, $u_n = 2^n$, modèle malthusien discret en temps.

C) Suites arithmético-géométriques

[suite arithmético-géométrique, (p : entier donné)] **Déf.3**

a. Premier terme : $u_p \in \mathbf{C}$. Paramètres : $a, b \in \mathbf{C}$

b. Relation de récurrence : $\forall n \geq p \quad u_{n+1} = au_n + b$.

c. T1> Forme explicite

$$\forall n \geq p \quad u_n \overset{a\neq 1}{=} \ell + a^{n-p}(u_p - \ell)$$

où $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ est la valeur de la suite constante vérifiant la même relation de récurrence que (u_n).

D) Convergence des suites géométriques

[convergence de (q^n), $q \in \mathbf{C}$] **Thm.1**

a. Si $|q| > 1$, (q^n) diverge et $|q|^n \to +\infty$.

b. Si $|q| < 1$, $q^n = o(1)$.

c. Si $|q| = 1$, (q^n) est bornée, mais ne converge que si $q = 1$.

On voit trop souvent dans les copies : *«$q \in [-1,1]$ donc $q^n \to 0$.»*, ce qui est faux

II Suites récurrentes linéaires à deux pas

[SRL$_2$] **Déf.4**

a. Premiers termes : u_p, u_{p+1} *réels.*

b. Relation de récurrence :

$$\forall n \geq p \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0. \quad (E_{a,b})$$

c. Polynôme caractéristique associé : $P = X^2 + aX + b$.

d. Discriminant de P : $\Delta := a^2 - 4b$.

e. Équation caractéristique associée : $P(z) = 0$.

f. Terme général. $\forall n \geq p$:

1) Si $\Delta \neq 0$:

$$\forall n \geq p \quad u_n = Ar_1^{n-p} + Br_2^{n-p}$$

($r_{1,2}$: les deux racines de P)

2) Si $\Delta = 0$:

$$\forall n \geq p \quad u_n = (An+B)r^n$$

(r : la racine de P)

Dans les deux cas, A, B sont des constantes ajustées par les valeurs initiales u_p et u_{p+1} de la suite

Rem.2 L'ensemble des suites vérifiant la relation $(E_{a,b})$ est un s-ev de l'ensemble des suites (définies à partir du rang p).

T2>

- La détermination de A, B donne toujours un système de Cramer 2×2.
- Dans le cas où $\Delta < 0$, A et B sont conjugués (si u_p, u_{p+1} sont réels!). Penser dans ce cas à la forme exponentielle de u_n pour simplifier l'expression finale.

Ne pas se planter sur la fabrication de P notamment si a ou b est nul !

III Sommes classiques

A) Les sommes de puissances

a. $\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. $\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B) Suites arithmétiques/géométriques

a. Termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \underbrace{\frac{u_m+u_n}{2}}_{\text{moyenne du premier et dernier terme}} \times \underbrace{(n-m+1)}_{\text{nombre de termes de la somme}}$$

(La raison n'intervient pas)

b. Termes consécutifs d'une suite auite géométrique de raison q :

$$\sum_{k=m} nq^k \overset{q\neq 1}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{premier terme} \\ \text{de la somme}}}{q^m} \times \frac{1-q^{\overbrace{n-m+1}^{\text{nombre de termes dans la somme}}}}{1-q}$$

$$\sum_{k=m}^{n} q^k \overset{q=1}{=} \underbrace{n-m+1}_{\text{nombre de termes dans la somme}}$$

Pour **b.** : Ne pas oublier si nécessaire de distinguer les cas $q=1$ et $q \neq 1$. Si $|q|>1$ on préfère écrire le quotient sous la forme $\frac{q^{n-m+1}-1}{q-1}$.

C) Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}.$$

En particulier :

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k$ donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$

T3> Penser aux variantes de ces sommes : incomplètes, translatées.

T4> Ce sont essentiellement les seules sommes que l'on sache calculer. Essayer de les identifier pour des calculs de sommes sans indications.

D) Formules du télescopage

$\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1}-u_k) = u_{q+1}-u_p$ et $\prod_{k=p}^{q} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p}$

E) Règles de calcul sur $\sum$ et $\prod$

a. La valeur de $\sum_{\bullet=m}^{n} u_\bullet / \prod_{\bullet=m}^{n} u_\bullet$ ne fait jamais intervenir $\bullet$.

b. $\sum_{k=m}^{n} / \prod_{k=m}^{n}$ contient $n-m+1$ termes.

c. $\sum_{x\in A} 1 = \#A$. En particulier : $\sum_{k=m}^{n} 1 = n-m+1$.

d. $\sum_{k=m}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} v_k$; $\prod_{k=m}^{n} u_k \times v_k = \prod_{k=m}^{n} u_k \times \prod_{k=m}^{n} v_k$

e. $\forall \lambda \in \mathbf{C}$:

- $\sum_{k=m}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k$;
- $\prod_{k=m}^{n} \lambda u_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} u_k$

f. *Translation d'indices :*

$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} u_{k-p}$;

$\prod_{k=m}^{n} u_k = \prod_{k=m+p}^{n+p} u_{k-p}$

g. (*Renversement des termes*) $\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_{m+n-k}$;

$\prod_{k=m}^{n} u_k = \prod_{k=m}^{n} u_{m+n-k}$

h. Coup de cuillère invisible :

$\sum_{k=m}^{n} u_k = \left(\sum_{k=m+1}^{n} u_k \right) - u_m$; $\prod_{k=m}^{n} u_k = \frac{\left(\prod_{k=m+1}^{n} u_k \right)}{u_{m+1}}$

i. *Expressions factorielles de produits classiques :*

$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$

$\prod_{k=1}^{n} 2k = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = 2^n n!$

$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$