Suites numériques réelles

Notations Rappels	• Prérequis 1 : échelle de croissance des suites.	ration.
	• Prérequis 2 : calculs avec $o(1)$.	• Analyse de base pour l'étude de fonctions et la résolution d'équations.
	• Prérequis 3 : techniques de majoration.	

I VOCABULAIRE COURANT

A) VOISINAGE

- a. $\bar{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- b. Voisinage de $\ell \in \mathbf{R}$: tout intervalle de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon, \varepsilon > 0$.
- c. Voisinage de $+\infty$: tout intervalle de la forme $]a, +\infty[(a \in \mathbf{R})$.
- d. Voisinage de $-\infty$: tout intervalle de la forme $]-\infty, a[(a \in \mathbf{R})$

B) NATURE D'UNE SUITE

- a. Nature d'une suite : convergente ou divergente.
- b. Monotonie d'une suite : croissante ou décroissante ou rien de cela.

C) PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE

[Ultra important] **Déf. 1**
Soit (P_n) une propriété dépendant d'un entier n . La propriété (P_n) est asymptotique, ou asymptotiquement vraie, ou locale, ou encore presque toujours vraie, si elle vraie pour tout entier n sauf au plus un nombre fini d'entre eux.

Rem.1 | La plupart des théorèmes qui suivent demandent des conditions vraies seulement asymptotiquement.

II BORNITUDE

- a. Le majorant, minorant, bornant d'une suite ne peut dépendre de la valeur des termes de cette dernière.
- b. (u_n) est bornée $\Leftrightarrow (|u_n|)$ est majorée.
- c. Toute suite convergente est bornée.

T1> Revoir les techniques de majoration.

[caractère asymptotique] **Thm. 1**
Si $\bullet \in \{\text{majorée, minorée, bornée,}\}$, une suite asymptotiquement $\bullet$ est $\bullet$, puisque tout ensemble fini est $\bullet$, et la réunion de deux ensembles $\bullet$ est $\bullet$.

III CONVERGENCE

A) LIMITE

- a. (u_n) converge vers $\ell \in \bar{\mathbf{R}} \Leftrightarrow$ tout voisinage de ℓ contient presque tous les termes de la suite. **Déf.1**
- b. La limite est unique.
- c. La notion de convergence est locale. En particulier, il revient au même d'étudier la convergence de la suite (u_n) ou d'une suite tronquée $(u_{n+1}), (u_{n+2}), \dots$: elles sont de même nature et en cas de convergence, elles ont toutes même limite.

B) SUITES ADJACENTES

[Suites adjacentes] **Déf. 2**
Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre décroissante et $u_n - v_n = o(1)$.

[des suites adjacentes] **Thm. 2**
Deux suites adjacentes sont toujours convergentes dans $\mathbf{R}$ et de même limite.

C) SUITES EXTRAITES

[des suites extraites] **Thm. 3**
Soit $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$. Sont équivalents

- a. (u_n) converge vers ℓ .
- b. 1) (u_{2n}) converge dans $\bar{\mathbf{R}}$.
- 2) (u_{2n+1}) converge dans $\bar{\mathbf{R}}$.
- 3) Leurs limites valent toutes deux ℓ .

Rem.2 | Par négation, (u_n) ne peut converger dès lors qu'une des conditions 1.,2.,3. n'est pas vérifiée.

T2> Fournit un critère de divergence par négation de l'équivalence. Fournit aussi un critère de convergence si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes puisque dans ce cas par b. est vraie.

D) MINORATION - GENDARMES

[minoration] **Thm. 4**
Si $u_n \geq v_n$ asymptotiquement alors $v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow u_n \rightarrow +\infty$

! Ne pas confondre avec les gendarmes, dont la conclusion est la convergence de la suite!

[gendarmes] **Thm. 5**

- a. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ asymptotiquement et si (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .
- b. Si $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ asymptotiquement et si $\varepsilon_n = o(1)$ alors (u_n) converge vers ℓ .

T3> La forme a. sert notamment à l'obtention d'équivalents.

E) SIGNE DE LA LIMITE

Si $u_n \rightarrow \ell, \ell \in \bar{\mathbf{R}}, \ell \neq 0$ alors (u_n) est asymptotiquement du signe de ℓ et non nul.

T4> Sert à justifier que des suites sont asymptotiquement bien définies. Exemple : Si $u_n \rightarrow 3 > 0$, asymptotiquement, il est pertinent de parler de $\ln(u_n)$

[convergence monotone] **Thm. 6**
Si (u_n) est croissante, de deux choses l'une :

- a. Ou bien (u_n) est majorée. Dans ce cas elle converge dans $\mathbf{R}$. De plus, sa limite $\ell \in \mathbf{R}$:
 - 1) est un majorant de la suite : $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq \ell$.
 - 2) est le plus petit majorant de la suite : tout autre majorant M de la suite vérifie $M \geq \ell$.
- b. Ou bien (u_n) est non bornée. Dans ce cas elle diverge vers $+\infty$.

! On voit souvent : « (u_n) est croissante majorée par 2 donc (u_n) converge vers 2. »

IV PASSAGE À LA LIMITE

A) RÈGLE BASIQUE

Avant de passer à la limite dans une relation (R_n) dépendant d'un entier n :

- a. Vérifier qu'elle est vraie asymptotiquement.
- b. Après avoir fait $n \rightarrow +\infty$ dans (R_n) , il ne peut plus rester de n dans la relation (R) obtenue. ☠

T5> Utile pour obtenir des renseignements sur la limite d'une suite qu'on sait convergente.

B) DANS LES INÉGALITÉS

[limite dans les inégalités] **Thm. 7**

- a. On peut passer à la limite dans une inégalité vraie asymptotiquement.
- b. Celle dernière devient large à limite dans tous les cas, même si elle était stricte avant passage à la limite. ☠

V ÉQUIVALENTS

A) FORMES INDÉTERMINÉES : MODE D'EMPLOI

$\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^1, 0^\infty \dots$

Typ. Symboles mnémotechniques

Rem.3 | En réalité, ces formes sont toutes des variantes de la première par composition avec $\exp/\ln$.

Rem.4 | Usage : p.ex, le symbole 0^∞ signifie $u_n^{v_n}$ avec $u_n \rightarrow 0$ et $v_n \rightarrow \infty$. Comme $u_n^{v_n} = e^{u_n \ln v_n}$, ce qui est dans l'exponentielle est bien une forme indéterminée.

T6> Pour calculer une limite : on applique les opérations. Si on tombe sur une forme indéterminée, on lève l'indétermination en cherchant un équivalent.

B) RÈGLES DE CALCUL SUR LES ÉQUIVALENTS

Les suites sont supposées non nulles asymptotiquement

- a. $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n$ et v_n sont asymptotiquement de même signe.
- b. $\begin{cases} u_n \sim u'_n \\ v_n \sim v'_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n v_n \sim u'_n v'_n \\ \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n} \end{cases}$
- c. Si $\alpha \in \mathbf{R}$ ne dépend pas de n et $u_n > 0$ asymptotiquement : $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$. En particulier : $u_n \sim v_n \Rightarrow \sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

d. Si $u_n \rightarrow \ell$ et $\ell \neq 0$ alors $u_n \sim \ell$ asymptotiquement

T8> Les équivalents ne passent pas aux sommes, ni aux $\ln, \exp$

T9> On n'écrit jamais $u_n \sim 0$

T10> On ne mélange pas dans une expression $\sim$ et $o(1)$.

T7> On obtient un équivalent de u_n en :

- a. Atomisant l'expression en expressions compatibles avec les opérations (produits, quotients, puissances) pour simplifier.
- b. Analysant les termes figurant dans chaque expression et en factorisant par le terme le plus haut sur l'échelle de croissance.

VI ÉTUDE DES SUITES RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$

Hors-programme, mais les techniques sont classiques

A) QUESTIONS...RÉCURRENTES

- q1. La suite est-elle bien définie?
- q2. Est-elle monotone?
- q3. Quelles sont ses limites possibles?
- q4. Converge-t-elle? Si oui, vers quoi?

B) POUR SE FAIRE UNE IDÉE

T8> Une étude de la fonction f plus ou moins rapide pour obtenir le tracé de sa courbe représentative est bienvenue.

T9> Une représentation graphique de C_f et des premiers termes de la suite par cobwebbing (introduire la première bissectrice) permet de conjecturer la nature de la suite.

Rem.5 | On peut aussi court-circuiter cela par une simulation informatique. Ci-dessous, un script fabriquant la liste des termes $u_0, \dots, u_n$ (on a pris ici $n = 10, u_0 = 1/2, f(x) = 2x(1-x)$):

Code Python ▼

```
1 f = lambda x : 2*x*(1-x)
2 u0, n = 0.5, 10
3 L = [u0]
4 for k in range(n):
5     L.append(f(L[-1]))
```

C) MÉTHODES DE DÉMONSTRATION

[Intervalle stable] **Déf. 3**

Intervalle I tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.

[Point fixe de f] **Déf. 4**

Toute solution x de l'équation

$$f(x) = x \quad (\text{Fix})$$

T10> Un intervalle (a, b) où a, b sont deux points fixes (finis ou infinis) consécutifs de f et sur lequel f est monotone est stable par f

D) RÉPONSES AUX QUESTIONS DE A)

r1. Si $u_0 \in I$ et I est stable par f alors (u_n) est bien définie et tous les termes de la suite sont dans I .

T11> Se montre par récurrence, avec comme hypothèse de récurrence : u_n existe et $u_n \in I$

Typ. il s'agit du même terme, pas de la suite!

r2. Si $u_0 \in I$ où I est stable par f et si $f(x) - x$ est de signe constant sur I , alors (u_n) est monotone.

T12> Évident

r3. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors ℓ est une solution de (Fix).

T13> Passer à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

r4. Si on est dans le cas de **r2.** et si de plus I est borné, alors (u_n) converge.

T14> C'est le théorème de convergence monotone.

r4bis. Détermination de la limite

T15> En passant à la limite dans la relation $u_n \in I$ ou éventuellement une relation plus fine, on déduit la valeur de la limite en éliminant les limites non acceptables.

Rem.6 | On peut avoir des situations très compliquées, notamment si aucune monotonie ne s'observe lors du tracé des premiers termes. Dans ce cas, il peut être salvateur d'étudier les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) associées à la fonction $f \circ f$.

Rem.7 |

T16> Si on a un bon contrôle de la dérivée f' sur I $|f'(x)|$ est bornée par une constante $k \in]0, 1[$ (*)

On peut alors occulter **q2.**, et obtenir la convergence sans monotonie :

a. en remarquant que

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq_{\text{TAF}+(\ast)} k |u_n - \ell|$$

b. en montrant par récurrence que :

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

c. En concluant par le théorème des gendarmes.