Continuité : propriétés globales

Rappels

- **Segment** : intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b]$, a, b réels. C'est donc un ensemble **borné** et qui **contient ses bornes.**
- **Image de I par f** Typ. ensemble

$$f(I) = \{f(x) \quad | \quad x \in I\}$$

C'est l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ quand x parcourt I.

I Théorèmes fondamentaux

A) Valeurs intermédiaires

[Valeurs intermédiaires : TVI] **Thm.1**

Soit $I = [a, b]$ un segment et $f \in \mathscr{C}^0(I)$. Alors :

$$f(a) \times f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] \quad f(c) = 0$$

$T_1>$

a. La condition $f(a)f(b) < 0$ signifie : $f(x)$ a changé de signe entre les points a et b, ou $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraires.

b. Ce théorème permet de justifier l'existence d'une solution à une équation dans un segment donné sans avoir à la calculer explicitement.

c. Il garantit l'existence d'une solution dans I a l'équation $f(x) = 0$ mais ne dit **rien** sur son unicité, ni même sur sa valeur.

d. On trouve une solution approchée à l'équation $f(x) = 0$ en programmant la méthode de dichotomie, ou de Newton, voir IV.

e. **1)** $T_2>$ On se ramène toujours à une équation de cette forme en mettant l'inconnue dans le premier membre.

Exemple. On peut justifier l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = x$ en considérant l'équation $f(x) - x = 0$ et en appliquant **Thm 1.** à $F : x \mapsto f(x) - x$.

2) $T_3>$ Parfois on préfère laisser un second membre non nul, considérer l'équation $f(x) = y$ et construire le tableau de variations de f dans lequel on place a, b, $f(a)$, $f(b)$. et On arrive à justifier que y est entre $f(a)$ et $f(b)$

B) Corollaire

Si I est un intervalle et f est $\mathscr{C}^0(I)$ alors $f(I)$ est aussi un intervalle.

Rem.1 | C'est ce résultat qui permet de tracer des flèches sans se poser de questions lorsque l'on construit un tableau de variations!

C) Compacité et continuité

[Compacité] **Thm.2**

Soit $I = [a, b]$ et $f \in \mathscr{C}^0(I)$. Alors : $f(I)$ est un segment. En particulier :

a. f est bornée sur I.

b. En notant $f(I) = [m, M]$, f admet un minimum absolu, m, et un maximum absolu M sur I : ainsi f atteint ses bornes puisque pour un certain c_+ (resp. c_-) dans I, $f(c_+) = M$ (resp. $f(c_-) = m$).

II Théorème de la bijection

A) Énoncé

[Théorème de la bijection] **Thm.3**

Soit f une fonction définie sur un ensemble I. Si :

a. I est un intervalle.

b. f est continue sur I.

c. f est strictement monotone sur I.

Alors :

a. $J = f(I)$ est un intervalle.

b. f réalise une bijection de I sur J.

c. De plus, bijection réciproque f^{-1} de f est :

1) bijective de J sur I.

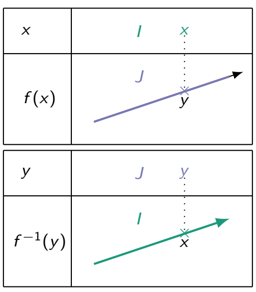
2) de même monotonie que f

3) continue sur J

Rem.2 | La realtion $y = f(x)$ s'appelle alors *changement de variables continu.*

$T_4>$

a. Le tableau de variations de f^{-1} se déduit de celui de f en échangeant les intervalles I et J.



b. L'expression explicite de f^{-1} est rarement calculable. Le cas échéant, elle s'obtient en résolvant explicitement l'équation

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in I$, y étant un paramètre que l'on fixe dans J. La solution x dans I de cette équation est unique dans ce cas, et est par définition $x = f^{-1}(y)$: l'expression de la solution en termes de y est celle de $f^{-1}(y$

B) Application à l'étude de suites implicites

Les deux types de suites implicites

Situation	A)	B)
(E_n)	$f(x_n) = y_n$	$f_n(x) = 0$
La fonction	ne bouge pas avec n	bouge avec n
Le second membre	bouge	ne bouge pas
$(\star)$ $\forall n \in \mathbb{N}$	$x_n = f^{-1}(y_n)$	$f_n(x_n) = 0$
Difficulté	Simple	demande un peu de travail

$T_5>$

a. Dans le cas **A)**, les propriétés qualitatives de (x_n) se déduisent de la relation $(\star)$.

b. Dans le cas **B)**, la connaissance du signe de $f_{n+1} - f_n$ ainsi que la relation $(\star)$ permettent conjointement de placer x_n et x_{n+1} sur le tableau de f_n et de déduire ainsi la monotonie de (x_n).

III Relations de réciprocité

A) Cas général

Si $f : I \to J$ est une bijection, alors $f^{-1} : J \to I$ est aussi une bijection et par définition on a les relations suivantes, dites de réciprocité :

$$\begin{cases} \forall x \in I & f^{-1}(f(x)) = x \\ \forall y \in J & f\left(f^{-1}(y)\right) = y \end{cases}$$

Rem.3 |

a. Pour ne pas s'embrouiller dans les domaines, et les relations de réciprocité, prendre des noms de variables qui suivent l'alphabet : si on p.ex on a I, J pour les noms des domaines, choisir pour les variables attachées à chaque ensemble $a \in I$ et $b \in J$, ou $x \in I$ et $y \in J$, ou $y \in I$ et $z \in J$, ou $u \in I$ et $v \in J$, *etc.* mais pas $x \in I$, $t \in J$.

b. Relations à manipuler avec la plus grande prudence si $I \neq J$. Voir le paragraphe suivant.

B) Cas particuliers

a. Fonction carré
$f : x \mapsto x^2$ sur $I = \mathbf{R}_+$, $J = I$, $f^{-1} = \sqrt{\cdot}$.

$$\{\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x$$

En revanche, à cause du défaut de bijectivité de la fonction f si elle était définie sur $\mathbf{R}$:

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

b. Fonction exponentielle
$f = \exp$, $I = \mathbf{R}$, $J = \mathbf{R}_+^\star$, $f^{-1} = \ln$.

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbf{R} & \ln(e^x) = x \\ \forall y \in \mathbf{R}_+^\star & (e^{\ln y}) = y \end{cases}$$

c. Fonction tangente (en restriction)
$f = \tan_{|I}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $J = \mathbf{R}$, $f^{-1} = \arctan$.

$$\begin{cases} \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[& \arctan(\tan t) = t \\ \forall x \in \mathbf{R} & \tan(\arctan x) = x \end{cases}$$

Ainsi par exemple : $\arctan(\tan(\pi/4)) = \frac{\pi}{4}$,
mais $\arctan(\tan(5\pi/4)) \neq \frac{5\pi}{4}$

IV Méthodes de dichotomie et de Newton en Python

A) Exemple classique

Dans ce qui suit, on cherche une solution approchée à $\varepsilon = 10^{-p}$ près de la solution x à l'équation $x^2 - 2 = 0$ sur $I = [1, 2]$

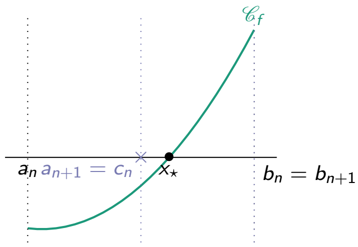
```python
# 1. Définition de f
f = lambda x: x**2-2
```

Rem.4 | Pour de courtes fonctions, il est plus rapide de les implémenter par le mot clé `lambda` que par un classique `def`—`return`.

B) Méthode de dichotomie

Hypothèse : (Séparation) On connait un segment $[a, b]$ ne contenant qu'une seule racine $x_\star$ de f. La séparation demande une vraie étude dont on ne peut faire l'économie.

Principe : Partant du premier segment $[a, b]$, on construit, à chaque passage dans la boucle, un nouveau segment $[a_n, b_n]$ de longueur deux fois plus petite que celle du précédent et contenant la solution localisée $x_\star$. de l'équation.



Sur cet exemple $[a_n, b_n]$ devient $[c_n, b_n]$, autrement dit, on a posé $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$

```python
# 2. Initialisation ---------
an,bn = 1,2          # a et b
p = 3
eps = 10**(-p) # Précision=10-3

# 3. Dichotomie -------------
while bn-an>eps:
    cn  = (an+bn)/2
    if f(cn)*f(bn)<0:
        an = cn
    else:
        bn = cn

# 4. Valeur approchée -------
print(round(an,p))
```

Rem.5 | On a donc une valeur approchée à ε près dès que $b_n - a_n \leq \varepsilon$ en prenant par exemple a_n (qui est dans ce cas une valeur approchée par défaut).

Vitesse de convergence : elle est linéaire au sens où l'exposant du majorant est linéaire par rapport à n :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |x_\star - a_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

C) Méthode de Newton

Hypothèses :

a. (Séparation) On connaît un intervalle I ne contenant qu'une seule racine $x_\star$ de f. La séparation demande une vraie étude dont on ne peut faire l'économie.

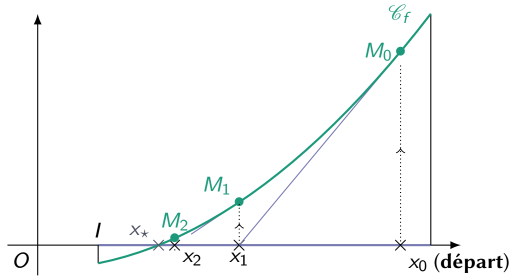
b. f est $\mathscr{C}^2(I)$.

c. f' ne s'annule pas sur I (f est donc strictement monotone sur I).

Principe : Partant d'un point $x_0 \in I$, on considère $M_0(x_0, f(x_0)) \in \mathscr{C}_f$, puis, de proche en proche, on construit des points M_n d'abscisse x_n tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ainsi x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M_n avec l'axe des abscisses.



Implémentation : On adopte comme critère d'arrêt le suivant : si deux termes consécutifs x_n et x_{n+1} de la suite diffèrent de moins de ε, alors x_{n+1} est une valeur approchée de $x_\star$ à ε près (ligne 14 du script).

```python
1  # 1. Fonction dérivée ------------
2  f1 = lambda x: 2x
3
4  # 2. Fonction associée à la suite
5  F = lambda x : x - f(x)/f1(x)
6
7  # 3. Initialisation -------------
8  p = 3
9  eps  = 10**(-p)
10 u = 2       #u0
11 v = F(u)    #u1
12
13 # 4. Itérations -----------------
14 while abs(u-v)>eps:
15     u,v = v,F(v)
16
17 # 5. Valeur approchée ------------
18 print(round(v,p))
```

Vitesse de convergence : elle est quadratique, au sens où l'exposant du majorant est une suite géométrique de raison 2 :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |x_\star - x_n| \leq \frac{M}{2^{2^n}}.$$

La précision double à chaque itération. La suite converge donc très rapidement.
Mises en garde :

a. La détermination de I est cruciale dans la méthode et demande un travail préalable à ne pas sous-estimer.

b. Bien que la méthode soit extrêmement efficace, elle peut échouer si l'on part d'un point x_0 tel que $f'(x_0)$ est petit : la tangente est alors quasiment horizontale et l'intersection avec l'axe des abscisses n'est plus dans I !