Notation o Échelles de croissance - équivalents

Notations Cadre

- $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$
- I : voisinage de x_0
- $x \underset{x \in I}{\to} x_0$
- Asymptotique (adj.) : au voisinage de x_0. Synomyme de local.

Dans tout ce qui suit, appliquer les résultats :

- pour les fonctions avec : $I = \mathscr{D}_f$
- pour les suites avec : $I = \mathbf{N}, x = n, x_0 = +\infty$ En effet : seul $+\infty$ est pertinent pour une analyse asymptotique. De plus, une suite est une fonction définie sur $\mathbf{N}$. On préfère alors noter u_n au lieu de $f(n)$ dans le contexte des suites.

I Notation de Landau $o(1)$

A) Usage

Notation qui permet de façon souple d'effectuer des calculs asymptotiques.

B) Notation

[notation $o(1)$] **Déf.1**

$o(1), x \to x_0$ est une notation pour dire : «une fonction qui tend vers 0 quand $x \to x_0$.»

Rem.1 L'expression explicite de la fonction n'a aucune importance dans cette notation : seul le renseignement local (à savoir : limite nulle en x_0) est utile.

Rem.2 $o(1)$ contient la notion de limite : il est donc indispensable de préciser $x \to x_0$ (sauf éventuellement dans le cas des suites où $x = n \to \infty$)

C) Opérations

Dans tout ce paragraphe, ℓ est réel

R1) Convergence : : Une fonction (suite) ayant ℓ pour limite en x_0 (en $+\infty$) se note :

$$\ell + o(1) \quad x \to x_0 \qquad \text{(R1)}$$

R2) Somme : La somme de deux fonctions (suites) de limite nulle a une limite nulle :

$$o(1) + o(1) = o(1) \quad x \to x_0 \qquad \text{(R2)}$$

R3) Multiples : Si une fonction (suite) a une limite nulle, ses multiples aussi :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \lambda o(1) = o(1) \quad x \to x_0 \qquad \text{(R3)}$$

En particulier : $-o(1) = o(1)$.

R4) Produit : Le produit de deux fonctions (suites) de limite nulle est de limite nulle :

$$o(1) \times o(1) = o(1) \quad x \to x_0 \qquad \text{(R4)}$$

R5) Inverse : Si une fonction (suite) tend vers $\ell \neq 0$, son inverse tend vers 0 :

$$\frac{1}{\ell + o(1)} = \frac{1}{\ell} + o(1) \quad x \to x_0 \qquad \text{(R5)}$$

En particulier $\dfrac{1}{1 + o(1)} = 1 + o(1)$

R6) Continuité : Si f est continue en x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$:

$$f(x_0 + o(1)) = f(x_0) + o(1) \; x \to x_0 \qquad \text{(R6)}$$

$T_1>$ Très utile avec les fonctions usuelles

En particulier :

Continuité en 0 des fonctions usuelles

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + o(1)} &= 1 + o(1) \quad x \to 0 \\
\ln(1 + o(1)) &= o(1) \quad x \to 0 \\
(1 + o(1))^{\alpha} &= 1 + o(1) \quad x \to 0 \\
e^{o(1)} &= 1 + o(1) \quad x \to 0
\end{aligned}$$

R7) Autres opérations : Le terme $o(1)$ se manipule dans les calculs algébriques comme les autres.

$$\begin{aligned}
o(A) &= A \times o(1) \\
o(o(1)) &= o(1) \quad x \to x_0
\end{aligned}$$

II Échelle de croissance

A) Usage

Permet de lever des formes indéterminées lorsque les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.

B) Mode d'emploi

a. Il y a 4 échelles de croissnace . En : **A1)** $x_0 = +\infty$, **A2)** $x_0 = -\infty$, **B1)** $x_0 = 0$, **B2)** $x_0 = a \in \mathbf{R}^\star$.

b. Sur l'échelle, en dehors de l'unité, tout terme a une limite nulle ou infinie. Rien d'autre.

c. Si B est au-dessus de A dans l'échelle, cela signfie :

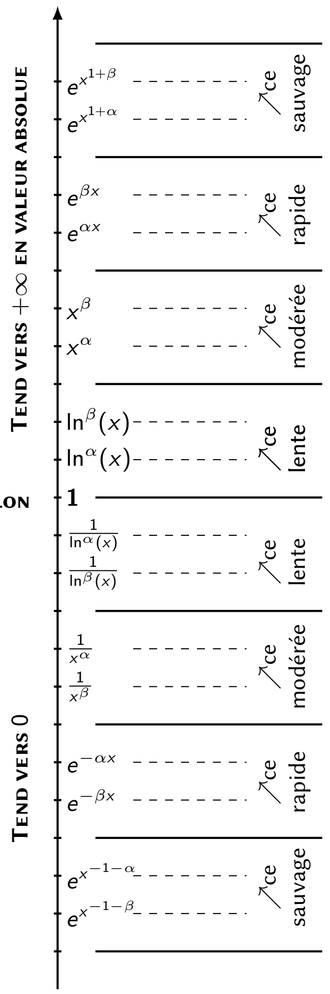
$$\frac{|A|}{|B|} = o(1) \quad x \to x_0$$

Dit autrement : *B est infiniment grand devant A* : $\dfrac{|B|}{|A|} \to +\infty \quad x \to x_0$, ou en appliquant **R7)** : $A = o(B)$

d. En particulier : tout ce qui est au-dessus de 1 sur l'échelle tend vers ∞, tout ce qui se trouve en-dessous de l'échelle tend vers 0.

e. Le **produit** de termes de l'échelle de différentes classes donne un terme dans la classe la plus haute des facteurs qui le consituent : p. ex, le produit de fonctions lentes ne donnera jamais une fonction rapide, ni même modérée.

A1) Échelle en $+\infty$. $\beta > \alpha > 0$

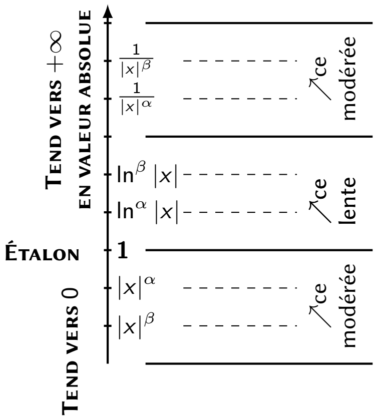


Rem.3 | La partie de l'échelle «Tend vers 0» se déduit de la première par symétrie autour de l'origine (en remplaçant chaque fonction f par la fonction $1/f$ bien entendu !). Il est donc inutile de retenir cette partie de l'échelle.

A2) Échelle en $-\infty$.

Elle s'obtient en changeant x en $-x$ dans l'expression des fonctions (pour peu qu'elles soient définies au voisinage de $-\infty$!).

B1) Échelle en 0. $\beta > \alpha > 0$



Rem.4 | ☠ Bien faire attention de distinguer la position relative de $|x|^\alpha$ et $|x|^\beta$ sur les échelles en $+\infty$ et en 0. C'est la raison pour laquelle les développements limités en 0 s'écrivent dans le sens des puissances croissantes (puisque les puissances les plus faibles sont situées plus haut dans l'échelle en 0.)

B2) Échelle en $x_0 \in \mathbf{R}^\star$

C'est l'échelle en 0 dans laquelle on applique la substitution par déphasage $x \to x - x_0$

III Équivalents

[fonctions/suites équivalentes] **Déf.2**

$$f \underset{x\to x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f}{g} = 1 + o(1) \quad x \to x_0$$

Rem.5 | La définition a un sens si f ou g n'est pas nulle au voisinage de x_0.

a) Propriétés des équivalents

a. $\begin{cases} f \sim F \\ g \sim G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} fg \sim FG \\ \frac{f}{g} \sim \frac{F}{G} \end{cases}$

b. Si $\alpha \in \mathbf{R}$ ne dépend pas de x et si $f > 0$ asymptotiquement : $f \sim g \Rightarrow f^\alpha \sim g^\alpha$. En particulier : $f \sim g \Rightarrow \sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

c. Si $f \to \ell$ et $\ell \neq 0$ alors $f \sim \ell$.

d. $f \sim g$ et $f > 0 \Rightarrow$ et $g > 0$ asymptotiquement. En particulier si f a une limite non nulle, f est localement non nulle et du signe de ℓ.

☠ Les équivalents ne passent pas aux sommes, ni aux ln, exp

☠ On n'écrit jamais $f \sim 0$

☠ On ne mélange pas dans une experession $\sim$ et $o(1)$.

T2> On obtient un équivalent de f lorsque $x \to x_0$ en :

a. Se ramenant à l'origine en posant $h = x - x_0$ si $x_0 \in \mathbf{R}^\star$

b. Atomisant l'expression en expressions compatibles avec les opérations (produits, quotients, puissances) pour simplifier.

c. Analysant les termes figurant dans chaque expression et en factorisant par le terme le plus haut sur l'échelle de croissance.

d. Utilisant les équivalents usuels.

b) Équivalent simple ....

T3> C'est un produit de termes de l'échelle de croissance.

Ex. En $+\infty$: $2/x$, ou $\pi e^{-2x}\sqrt{\ln x}$, mais pas $\sqrt{x+1}$

c) Équivalents usuels ....

[Équivalents à l'origine] **Thm.1**

a. $\sin h \underset{h\to 0}{\sim} h$.

b. $1 - \cos h \underset{h\to 0}{\sim} h^2/2$.

c. $\tan h \underset{h\to 0}{\sim} h$.

d. **1)** $(1+h)^\alpha - 1 \underset{h\to 0}{\sim} \alpha h$ α : réel indépendant de h.

2) En particulier : $\sqrt{1+h} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2}h$

e. $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

f. $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$.

[Formule de Taylor-Young] **Thm.2**

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors :

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$