Limites - Continuité

Rappels et prérequis

- $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $f_{|I}$: restriction de la fonction f à l'ensemble I.
- Voisinage de x_0 : c'est **toujours** un intervalle **ouvert**.
- Notation de Landau o.

I Notions fondamentales autour de la limite

a) Voisinage d'un réel ou de $\pm\infty$

[Voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$] **Déf.1**

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Un voisinage de a est :

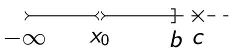
- **a.** Si $a \in \mathbf{R}$: tout intervalle V **ouvert** borné et centré en a : $V =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\quad \varepsilon > 0$.
- **b.** Si $a = +\infty$: tout intervalle **ouvert** non borné à droite : $V =]A, +\infty[\quad A \in \mathbf{R}$.
- **c.** Si $a = -\infty$: tout intervalle **ouvert** non borné à gauche : $V =]-\infty, A[\quad A \in \mathbf{R}$.
- **d.** $\mathscr{V}(a)$: ensemble des voisinages de a. Typ. $\mathscr{V}(a)$: ensemble

Rem.1 | Un voisinage est toujours un intervalle ouvert.

b) Point adhérent

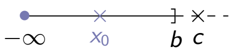
a. Donnée : $\mathscr{D}_f$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles. Par exemple :

$$\mathscr{D}_f =]-\infty, x_0[\cup]x_0, b] \cup \{c\}$$



b. $\bar{\mathscr{D}}_f$: $\mathscr{D}_f$ auquel on adjoint les extrémités des intervalles constituant $\mathscr{D}_f$, qu'ils soient bornés ou non.

$$\bar{\mathscr{D}}_f = \{-\infty\}\cup]-\infty, b] \cup \{-\infty, c\}$$



Rem.2 | Ainsi $\bar{\mathscr{D}}_f \subset \overline{\mathbf{R}}$.

b. Intérêt. On ne parle de $x \underset{x\in\mathscr{D}_f}{\to} x_0$ que pour les points $x_0 \in \bar{\mathscr{D}}_f$: ce sont les points adhérents à $\mathscr{D}_f$.

☠ Ci-dessous $x \underset{x\in\mathscr{D}_f}{\to} c$ n'a aucun sens.

c) Limite : propriétés

- **a. Unicité.** *Si f admet une limite en x_0, elle est unique.*
- **b. Notation.** On note $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathscr{D}_f}} f(x) = \ell$ pour signifier que f admet pour limite ℓ en x_0, mais aussi :
  1) Si ℓ est réel : $f(x) \underset{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathscr{D}_f}}{=} \ell + o(1)$
  2) Dans tous les cas $f(x) \underset{\substack{x\in x_0\\ x\in\mathscr{D}_f}}{\to} \ell$

Rem.3 | La notation de Landau est à utiliser sans modération pour les calculs de limites.

En général, dans ces notations, le « $x \in \mathscr{D}_f$ » est sous-entendu, il est clair que nécessairement $x \in \mathscr{D}_f$ puisque l'on a écrit $f(x)$. Dans le cas de limites à droite et à gauche, cette précision est obligatoire.

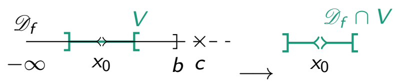
II Résultats importants et utiles

a) Localité

[Localité de la limite] **Thm.1**

f admet une limite en x_0 $\Leftrightarrow$ $f_{|\mathscr{D}_f\cap V}$ admet une limite en x_0, où V est un voisinage de x_0. En cas d'existence, les limites de ces deux fonctions en x_0 sont les mêmes.

T1> Sert à étudier la continuité en un point de raccord où l'expression de $f(x)$ change.



Rem.4 | D'après **Rem 1.**, Un voisinage V de x_0 étant ouvert, il suit que si $x_0 \in \bar{\mathscr{D}}_f \setminus \mathscr{D}_f$, $\mathscr{D}_f \cap V$ ne contient pas x_0 !

[Continuité en un point x_0 de f] **Thm.2**

Si $x_0 \in \mathscr{D}_f$, et si la limite en x_0 existe, elle ne peut être que $f(x_0)$. Dans ce cas, on dit que f est continue en x_0.

Rem.5 | Cela découle de la remarque qui suit et de la définition de limite.

☠ Ce n'est pas parce que $f(x_0)$ existe (qui veut simplement dire que $x_0 \in \mathscr{D}_f$!) que $\lim\limits_{x_0} f$ existe. La continuité est synonyme de l'existence et de l'égalité de ces deux nombres !

b) Limites latérales en un point réel

Soit $x_0 \in \bar{\mathscr{D}}_f$. D'après la partition suivante, toujours valable :

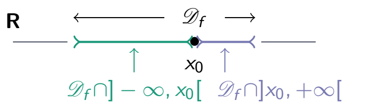
$$\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_f \cap (]-\infty, x_0[\cup\{x_0\}\cup]x_0, +\infty[),$$

$x \underset{x\in\mathscr{D}_f}{\to} x_0$ est la réunion de **3** cas :

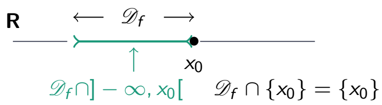
- **a.** *Examen de la limite à droite :* $x \underset{>}{\to} x_0$ et $x \in \mathscr{D}_f$
- **b.** *Examen de la limite à gauche :* $x \underset{<}{\to} x_0$ et $x \in \mathscr{D}_f$
- **c.** *Valeur de f en x_0 :* $x = x_0$ et $x \in \mathscr{D}_f$

Rem.6 | Certains de ces cas sont parfois vides suivant l'allure de $\mathscr{D}_f$, voir **Thm.3**.

Situation A. $x_0 \in \mathscr{D}_f$: le cas **c.** est non vide.

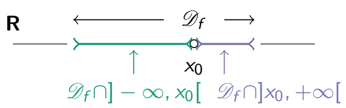


Situation A1. $x_0 \in \mathscr{D}_f$ est intérieur à $\mathscr{D}_f$. Les trois cas **a.**, **b.**, **c.** sont non vides.

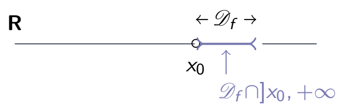


Situation A2. $x_0 \in \mathscr{D}_f$. Deux cas exactement sont non vides.

Situation B. $x_0 \notin \mathscr{D}_f$: le cas **c.** est vide.



Situation B1. $x_0 \notin \mathscr{D}_f$: $\mathscr{D}_f$ est épointé en x_0. Seul le cas **c.** est vide.



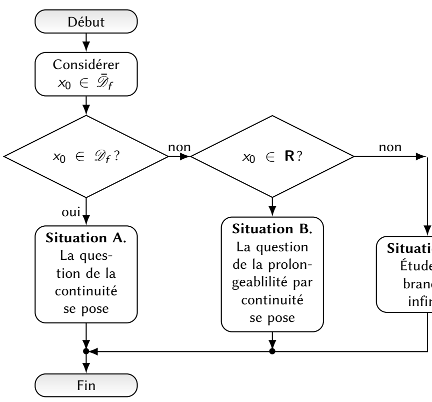
Situation B2. $x_0 \notin \mathscr{D}_f$. Deux cas exactement sont vides

[Limites latérales] **Déf.2**

Ce sont les limites a gauche $x \underset{<}{\rightarrow} x_0$ et à droite $x \underset{>}{\rightarrow} x_0$ lorsqu'il y a un sens à en parler.

Rem.7 Ainsi dans les situations **A1** et **B1**, il y a deux limites latérales à étudier, et dans les autres, une seule.

T2> Pour vérifier l'existence d'une limite en x_0, on commence par identifier la situation dans laquelle on se trouve, puis on sélectionne les outils d'étude adaptés pour répondre, ce qui peut se résumer sur le schéma suivant :



[Existence de la limite] **Thm.3**

Soit x_0 un réel dans $\bar{\mathscr{D}}_f$ et ℓ. Sont équivalents :

- **a.** f admet ℓ pour limite en x_0.
- **b.** **1)** La (les) limite(s) latérale(s) en x_0 existe(nt) et vaut (valent toutes deux) ℓ.
  2) (à vérifier dans la **situation A.**) $\ell = f(x_0)$

De plus dans le cas où ℓ est réel, on dit :

dans la situation A. que f est continue en x_0, ou que f *admet un développement limité d'ordre 0 en* x_0.

dans la situation B. que f se prolonge par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.

T3> Ainsi, on montre que f est prolongeable par continuité en x_0 en montrant que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$ existe et est réel.

III Calculs de limites

a) Fonctions usuelles

[Régularité des fonctions usulles] **Thm.4**

Les fonctions usuelles ont une limite en tout point de $\bar{\mathscr{D}}_f$, à l'exception de la fonction partie entière qui a une limite en tout point de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ mais des limites à droite et à gauche distinctes en tout point de $\mathbf{Z}$.

T4>

- **a.** ☠ Le calcul de limite doit toujours être précédé d'un argument d'existence.
- **b.** **Thm. 4** fournit un moyen de calculer des limites en invoquant la continuité, puisqu'il permet d'affirmer que $\lim_{x_0} f$ existe et vaut $f(x_0)$.
- **c.** On se sert aussi de ce théorème conjointement au **Thm. 1** lors de la vérification de la continuité d'une fonction définie par morceaux.

b) Opérations sur les limites

T5> Les limites passent aux opérations algébriques, à savoir : somme, produit, inverse, composition, hors cas indéterminés. Ce qui permet de justifier l'existence de limites et de les calculer.

Principales formes indéterminées

$$\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^1, 0^\infty$$

Typ. Symboles mnémotechniques

T6> On lève les indéterminations par obtention d'un équivalent.

IV Résultats complémentaires

a) Définition de la limite

[limite en $x_0 \in \bar{\mathscr{D}}_f$] **Déf.3**

La fonction f a pour limite $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$:

$$\forall W \in \mathscr{V}(\ell) \quad \exists V \in \mathscr{V}(x_0) \quad f(V \cap \mathscr{D}_f) \subset W.$$

b) Caractérisation séquentielle de la limite

[limites et suites] **Thm.5**

- **a.** Soit $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$ et $x_0 \in \bar{\mathscr{D}}_f$. Sont équivalents :
  - **1)** f admet ℓ comme limite en x_0.
  - **2)** Pour n'importe quelle suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de $\mathscr{D}_f$ convergeant vers x_0, la suite des images $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ.
- **b.** En particulier, si $x_0 \in \mathscr{D}_f$ et si f est continue en x_0, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

T7>

- **a.** Par contraposition, si on trouve une suite (u_n) de points de $\mathscr{D}_f$ telle que $u_n = x_0 + o(1)$ mais telle que la suite des images $(f(u_n))$ ne converge pas vers ℓ, alors f ne peut admettre ℓ comme limite ℓ en x_0.
- **b.** De même si la suite $(f(u_n))$ diverge, f ne peut avoir de limite en x_0.
- **c.** De même enfin, conjointement au résultat d'unicité de la limite, si on trouve deux suites de points de $\mathscr{D}_f$, mettons (u_n) et (v_n) convergeant vers x_0 mais dont les suites des images ont des limites distinctes, f ne peut avoir de limite en x_0. distinctes, alors

c) Convergence monotone

[convergence monotone] **Thm.6**

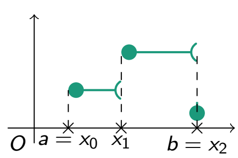
Si $x_0 \in \bar{\mathscr{D}}_f \setminus \mathscr{D}_f$ et f est croissante e sur un voisinage V de x_0, alors f admet une limite en x_0 et cette limite vaut $\ell = \sup_V f$.

Rem.8 Cette limite est finie si et seulement si f est bornée sur V.

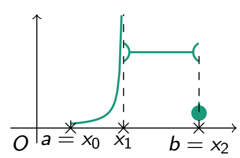
d) Fonctions continues par morceaux

[Fonction continue par morceaux] **Déf.4**

f est dite continue par morceaux un intervalle $I = (a, b)$ **borné** si il existe un nombre fini de points de I, mettons $x_0 < \cdots < x_n$ tels que $x_0 = a, x_n = b$ et pour tout entier $0 \leq k < n$, $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$. On note alors : $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(a, b)$.



$f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a, b])$



$f \notin \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a, b])$