Dérivation

Rappels

- Notations de Landau.
- Notion de limite
- Nuance entre limites latérales sur un voisinage ordinaire ou épointé.

I Notions de base

A) Taux d'accroissement

[Taux d'accroissement] **Déf.1**

Données : f une fonction, x_0 un réel de $\mathscr{D}_f$. Le taux d'accroissement en x_0 est la fonction Typ. fonction $\tau_{x_0} : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Elle est définie sur $\mathscr{D}_f \setminus \{x_0\}$.

B) Dérivabilité

[Typ. réel Nombre dérivé en x_0] **Déf.2**

La fonction f est dite dérivable en x_0 si et seulement si la fonction τ_{x_0} a une limite en x_0. La limite obtenue s'appelle nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \tau_{x_0} \qquad (1)$$

Rem.1

a. Le nombre dérivé est obtenu comme une limite. Il est déterminé par le comportement local de f.

☠ Une fonction dérivée n'est donc **jamais** prolongeable. C'est-à-dire : on ne peut **jamais** écrire : «*on pose* $f'(x_0) = \dots$ »

b. $T_1>$ L'étude de l'existence d'une dérivée, en cas ne non applicabilité des théorèmes d'opérations, revient donc à étudier l'*existence d'une limite* de τ_{x_0} en x_0.

C) Lien avec la régularité

a. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle définie en x_0 et admet un $DL_1(x_0)$ puisque (1) s'écrit :

$$f'(x_0) = \tau_{x_0} + o(1) \quad x \to x_0,$$

qui devient, en posant $h = x - x_0 \to 0$ et en multipliant par h :

$$f'(x_0)h = f(x_0+h) - f(x_0) + o(h)$$

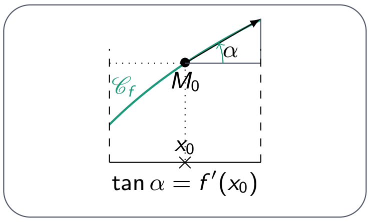
b. Il en résulte que si f est dérivable en x_0, elle admet un $DL_0(x_0)$ donc est continue en x_0.

c. ☠ En général, si vous mettez dans la même phrase «continue» et «dérivable», vous direz au mieux une banalité, et au pire une c...**Moralité :** évitez !

D) Interprétation graphique

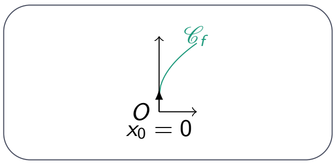
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f, et $M_0 \in \mathscr{C}_f$ le point de la courbe de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

a. Lorsque le nombre dérivé existe (c'est-à-dire, τ_{x_0} admet une limite réelle en x_0), $\mathscr{C}_f$ admet en M_0 une *tangente*, de pente $f'(x_0)$, et $\tan\alpha = f'(x_0)$.

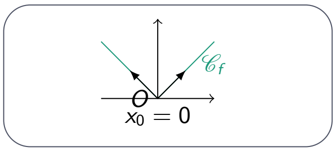


b. Sinon, il peut y avoir :

1) Une demi-tangente *verticale* : cas typique $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 0$. C'est le cas si τ_{x_0} a une limite infinie.



2) Deux demi-tangentes de pentes distinctes. On a alors en M_0 un *point anguleux.* : cas typique $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$. C'est le cas si τ_{x_0} a des limites latérales réelles mais distinctes.



3) Rien de tout cela. Dans ce cas, les phénomènes sont difficilement observables graphiquement.

II Fonction dérivée

A) Définition

[Typ. Fonction Fonction dérivée] **Déf.3**

C'est la fonction notée f', définie sur l'ensemble E des points de $\mathscr{D}_f$ en lesquels f est dérivable, par :

$$\forall x \in E \quad f'(x) = \lim_{x} \tau_x$$

Rem.2 En général $E \subsetneq \mathscr{D}_f$.

B) Dérivabilité des fonctions usuelles

[Stabilité par opérations] **Thm.1**

a. Les fonctions dérivables sont stables par les opérations usuelles de somme, produit, quotient, composition.

b. Parmi les fonctions usuelles, on a toujours $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'}$ **sauf** pour les fonctions racine carrée, valeur absolue et partie entière.

$T_2>$ En pratique :

a. Si toutes les fonctions en jeu dans l'expression d'une fonction F font intervenir des fonctions telles que $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'}$, alors u est dérivable sur son domaine simplement en citant ce théorème.

b. Sinon, en dehors de ces points x_0 particuliers, le **thm 1.** s s'applique, et aux points restants, l'étude de la limite de τ_{x_0} par les outils classiques (recherche d'équivalents,*etc.*) **s'impose. Cas typique :** présence de $|\cdot|$ ou de $\sqrt{}$

III Règles de calcul sur la dérivation

A) Opérations

Ici, f, g sont deux fonctions et partout où les expressions ont un sens, les relations

$$
\begin{array}{rcl}
(f+g)\text{'} & = & f'+g' \\
\lambda f)' & = & \lambda f' \\
(f\times g)' & = & f'\times g+f\times g' \\
\left(\dfrac{1}{f}\right)' & = & -\dfrac{f'}{f^2} \\
\left(\dfrac{f}{g}\right)' & = & \dfrac{f'g-fg'}{g^2} \\
(f\circ g)' & = & g'\times f'\circ g
\end{array}
$$

B) Fonctions usuelles

$f(x) =$	$f'(x) =$	$\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'}$?
$\lvert x\rvert$	1 si $x>0$ -1 si $x<0$	non : $\mathscr{D}_{f'} = \mathbf{R}^\star$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	oui
$1/x$	$-\dfrac{1}{x^2}$	oui
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	non : $\mathscr{D}_{f'} = \mathbf{R}_+^\star$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	oui
e^{mx}	me^{mx}	oui
$\cos x$	$-\sin x$	oui
$\sin x$	$\cos x$	oui
$\tan x$	$1+\tan^2 x$ $=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	oui
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	oui

T_3>

a. Pour dériver une expression $f(x)$ à valeurs complexes (c-à-d. si $f(x)\in\mathbf{C}$), en général, on met $f(x)$ sous forme algébrique et on dérive parties réelle et imaginaire. Exception : $x\mapsto e^{mx}$ pour $m\in\mathbf{C}$, qui se dérive comme dans le tableau ci-dessus.

b. Utile : $\forall n\in\mathbf{N}^\star \quad \left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

$f(u(x)) =$	$\dfrac{df(u(x))}{dx} = f'(u(x))$	$\times u'(x)$
$\lvert u(x)\rvert$	$u'(x)$ si $u(x)>0$ $-u'(x)$ si $u(x)<0$	
$u(x)^\alpha$	$(\alpha u(x)^{\alpha-1})$	$\times u'(x)$
$1/u(x)$	$\left(-\dfrac{1}{u(x)^2}\right)$	$\times u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}\right)$	$\times u'(x)$
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)$	$\times u'(x)$
$e^{u(x)}$	$(e^{u(x)})$	$\times u'(x)$
$\cos u(x)$	$(-\sin u(x))$	$\times u'(x)$
$\sin u(x)$	$(\cos u(x))$	$\times u'(x)$
$\tan u(x)$	$(1+\tan^2 u(x))$ $=\dfrac{1}{\cos^2 u(x)}$	$\times u'(x)$ $\times u'(x)$
$\arctan u(x)$	$\dfrac{1}{1+u(x)^2}$	$\times u'(x)$

T_4> Ce tableau se déduit du premier tableau en y effectuant la substitution $x\leftarrow u(x)$, puis en ajoutant un facteur $u'(x)$ au résultat de cette substitution.

Rem.3 | Il est clair que sur cette formule, la composée est dérivable au point x lorsque u est dérivable en x (c-à-d. $u'(x)$) existe, et f est dérivable au point $u(x)$ au point

C) Dérivée de la bijection réciproque

Thm.2

Soit $f : I \mapsto J$ est bijective, et considérons $f^{-1} : J\to I$.

Soit $y_0\in J$. Notons x_0 l'unique $x_0\in I$ tel que $f(x_0)=y_0$, autrement dit $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

a. Si $f'(x_0)$ existe et est **non nul**, alors f^{-1} est dérivable en y_0.

b. Dans ce cas :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

T_5>

a. Toute la difficulté du théorème réside en la détermination de x_0 en fonction de x_0 dans la mesure où l'énoncé porte sur y_0, mais le critère se formule à l'aide de $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

b. Si f' existe et ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable en tout point de J.

Rem.4 | Dans le cas où $f'(x_0)=0$, on peut affirmer que f^{-1} n'est pas dérivable en y_0. Par exemple, sur $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, la fonction $\tan_{|I}$ est bijective de I sur $J=\mathbf{R}$, dérivable sur I, et sa dérivée ne s'annule jamais sur I. Sa bijection réciproque, arctan, est donc dérivable sur J.

IV Accroissements finis

A) Théorème de Rolle

[Rolle] **Thm.3**

Si f est continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (inutile au bord), et si $f(a)=f(b)$ alors :

$$\exists c\in]a,b[\quad f'(c)=0.$$

Rem.5 | Le théorème est existentiel : il ne dit rien sur l'unicité de c (qui n'est pas unique en général d'ailleurs !), ni sur la localisation de ce fameux c.

B) Théorème des accroissements finis

[TAF] **Thm.4**

Si f est continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (inutile au bord), alors :

$$\exists c\in]a,b[\quad f'(c)(b-a) = f(b)-f(a). \tag{2}$$

Rem.6 |

a. Dans ce théorème, à part pour l'écriture du segment $[a,b]$, la formule (2) reste valable si $a>b$.

b. Ce théorème généralise le précédent et on peut lui faire la même remarque sur le réel c.

c. Il relie les variations globales de f à celles de x au prix d'un facteur $f'(c)$. Autrement dit, les variations de f sont du même ordre que celles de x à un facteur $f'(c)$.

d. T_6> En particulier, si f' est bornée sur $[a,b]$, ce qui est le cas par compacité lorsque f est $\mathscr{C}^1$, alors

$$\forall (x,y)\in[a,b]\quad |f(x)-f(y)|\leq \sup_{[a,b]}|f'||x-y|$$

Très utile pour contrôler la vitesse de convergence d'une suite (u_n) définie par récurrence.

e. T_7> Le principe directeur dans l'application du TAF est toujours le même : écriture de l'accroissement global par la formule (2) puis **contrôle de** $|f'|$ par majorations.

C) Applications aux variations

*[Monotonie sur un **intervalle**]* **Thm.5**

a. Si f' est **strictement** positive sur l'intervalle I sauf en au plus un nombre fini de points, alors f est **strictement** croissante sur I.

b. Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Rem.7 |

a. Pour le point **a.**, vous n'aurez **jamais** de stricte monotonie sans établir la stricte positivité de la dérivée.

b. ☠ Pour le point **b.**, si I n'est pas un intervalle, la conclusion est **fausse** : f n'est pas constante obligatoirement.