Équations différentielles

Rappels

- Techniques de primitivation à connaître
- Notion d'intervalle. Tous les coefficients des équations différentielles considérées sont supposés continus.
- I désigne un intervalle ouvert non vide.

I Équations linéaires

A) Théorème de structure

[Structure de l'ensemble des solutions] **Thm.1**

Les solutions d'une équation différentielle **linéaire** s'obtiennent en ajoutant à **une** solution particulière y_p **n'importe quelle** solution de l'équation homogène associée.

T1> On cite toujours ce théorème avant de résoudre. Il permet de scinder le problème de la résolution en deux étapes :

a. *Résolution de l'équation homogène associée.* Il s'agit simplement d'appliquer une formule.

b. *Recherche d'une solution particulière.* Les méthodes varient suivant le type de l'équation différentielle à traiter.

B) Principe de superposition ou linéarité de l'équation

[Linéarité] **Thm.2**

Si y_1 et y_2 sont deux fonctions,et λ un scalaire alors :

a. $(y_1+y_2)'+a(y_1+y_2)=(y_1'+ay_1)+(y_2'+ay_2)$

b. $(\lambda y)'=\lambda y_1'$

c. $(\bar{y_1})'=\bar{y_1'}$. En particulier avec ce qui précède :

1) $\mathfrak{Re}\,(y_1')=(\mathfrak{Re}\,y_1)'$

2) $\mathfrak{Im}\,(y_1')=(\mathfrak{Im}\,y_1)'$

Les même relations sont vraies avec les dérivées secondes

Rem.1 Particulière utile pour simplifier la recherche de solutions particulières à des équations linéaires.

II Équations linéaires du premier ordre

A) Forme normalisée

[Forme normalisée] **Déf.1**

Sur I $\quad \underset{\text{normalisé}}{y'} + \underset{\text{coefficient}}{a}\,y = \underset{\text{2d membre}}{b} \quad (E)$

Rem.2

a. Ici, a et b sont des fonctions *a priori*.

b. La variable des fonctions en jeu dans (E) est sous-entendue dans la notation.

[Équation homgène asociée] **Déf.2**

L'équation homogène associée à (E) est :

Sur I $\quad y'+ay=0 \quad (H)$

B) Résolution

[Cas a,b constants] **Thm.3**

L'équation (E) a une infinité de solutions. Ce sont les solutions y données sur I par :

a. Si $a\neq 0$:

$$y(t)=\frac{b}{a}+ke^{-at} \qquad k \quad \text{réel arbitraire}$$

Le réel k est déterminé par la donné d'une condition initiale du type $y(t_0)=y_0$

b. Si $a=0$: Les primitives de y sur I.

Rem.3 Ainsi, la recherche de primitive apparaît comme un cas particulier d'équation différnetielle du premier ordre.

Rem.4

T2> Dans le cas où la condition initiale est donnée à l'abscisse t_0, il est plus adapté d'écrire les solutions générales sous la forme :

$$y(t)=\frac{b}{a}+ke^{-a(t-t_0)} \qquad k \quad \text{réel arbitraire}$$

[non constant homogène $y'+ay=0$] **Thm.4**

L'équation (H) possède une infinité de solutions paramétrées par la variable libre $k\in\mathbf{R}$. Ce sont les fonctions définies sur I par :

$$z_k : t\mapsto ke^{-\int^t a(s)\mathrm{d}s}$$

Rem.5

a. Le choix de la primitive de la fonction a n'a aucune incidence dans l'expression des fonctions z_k.

b. Attention au signe $-$ devant l'intégrale (alors qu'il y a un $+$ dans (H)).

[Non constant non homogène] **Thm.5**

Les solutions sur I de (E) sont les fonctions y données par :

$$y(t)=y_p(t)+z_k(t)$$

où z_k désigne n'importe quelle solution de (H) et y_p une solution particulière de (E). Cette dernière s'obtient en appliquant la méthode de la variation de la constante.

Rem.6 On trouve alors par cette méthode :

$$y_p(t)=\int^t b(s)e^{A(s)-A(t)}\mathrm{d}s.$$

Cette formule n'est pas à retenir. En pratique on retient comment appliquer la méthode de variation de la constante.

III Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

A) Forme normalisée

Ici les coefficients a, b sont supposés constants

[Forme normalisée] **Déf.3**

Sur I $\quad \underset{\text{normalisé}}{y''} + \underset{\text{coefficient}}{a}\,y' \quad \underset{\text{coefficient}}{b}\,y = \underset{\text{2d membre}}{c} \quad (E)$

[Équation homgène asociée] **Déf.4**

L'équation homogène associée à (E) est :

Sur I $\quad y''+ay'+by=0 \quad (H)$

[Équation caractéristique associée] **Déf.5**

C'est l'équation du second degré d'inconnue complexe m :

$$(E_C) \quad m^2+am+b=0$$

On note $\Delta=a^2-4b$ son discriminant.

Rem.7 Attention à ne pas se tromper dans la confection de (E_C) quand b ou a est nul.

B) Résolution

[Cas homogène] **Thm.6**

L'équation (H) possède une infinité de solutions. En notant Δ le discriminant de son équation caractéristique, ce sont les fonctions définies sur I par :

a. Si $\Delta > 0$:
$$y(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t},$$
m_1 et m_2 étant les deux racines réelles de (E_C).

b. Si $\Delta = 0$:
$$y(t) = (At + B)e^{m_0 t},$$
où m_0 est la racine double rélle de (E_C).

c. Si $\Delta < 0$:
$$y(t) = e^{rt}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right),$$
où $m = r + i\omega$ est la racine de partie imaginaire positive de (E_c).

Dans les trois cas, les constantes A, B sont réelles quelconques (deux variables libres), elles sont déterminées de façon unique dès lors que l'on fixe un système de conditions initiales du type
$$y(t_0) = y_0 \quad \text{et } y'(t_0) = y_1$$

C) Prinicipe de superposition

[Principe de superposition] **Thm.7**

Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions sur l'intervalle I respectivement des équations :
$$(E_1) \quad y'' + ay' + by = c_1$$
$$(E_2) \quad y'' + ay' + by = c_2.$$
(même équations mais second membres différents).Alors :

a. $y_p = y_1 + y_2$ est une solution sur I de l'équation :
$$(E) \quad y'' + ay' + by = c_1 + c_2$$

b. Pour tout scalaire λ, $y_p = \lambda y_1$ est solution sur I de :
$$(E) \quad y'' + ay' + by = \lambda c_1$$

c. $y_p = \mathfrak{Re}\,(y_1)$ est solution sur I de :
$$(E) \quad y'' + ay' + by = \mathfrak{Re}\,(c_1)$$

d. $y_p = \mathfrak{Im}\,(y_1)$ est solution sur I de :
$$(E) \quad y'' + ay' + by = \mathfrak{Im}\,(c_1)$$

Rem.8 | C'est une conséquence immédiate du **Thm 2.**

T3> En pratique, on se sert de ce théorème pour atomiser la recherche de solutions particulières.

IV Équations non linéaires

A) Premier ordre autonome

[Forme normalisée] **Déf.6**

Ce sont les équations de la forme :
$$y' = F(y)$$
La dérivée de l'inconnue ne s'exprime qu'en fonction de l'inconnue et pas de la variable.

Rem.9 | Les modèles malthusien, logisitque et de Gompertz entrent dans cette catégorie.

T4>

Il n'y a pas de théorie générale sur la résolution, mais sous des hypothèses de travail qui seront précisées soit par l'énoncé soit par vous,la résolution de ces équations se réduit à une question de primitivation. Le tout est de formuler des hypothèses consistantes sur l'intervalle de résolution, et de ne pas oublier la constante d'intégration.

B) Autres cas

L'équation est du premier ordre et pas forcément autonome, avec une condition initiale :
$$(S)\begin{cases} y' &= F(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$
Des méthodes seront données dans les sujets. Un traitement numérique (donc une résolution) approchée est toujours possible notamment par la *méthode d'Euler.* La méthode d'Euler s'appuie sur la formule de Taylor-Young sur l'approximation de la dérivée par un taux d'accroissement (*cf.* fiche 09)

Données. Un point de départ $t_0 \in I$ et un point $T \in I$ en lequel on veut une valeur approchée de la solution y de (S).

Principe de la méthode. La méthode d'Euler consiste à calculer une approximation de la solution y de la manière suivante :

a. Fixer un pas $h > 0$ de subdivision de I, (petit), ou de façon équivalente, le nombre entier n de points de la subdivision (voir le point suivant).

b. Subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en n sous-intervalles de longueur $h = \dfrac{T - t_0}{n}$ et donc considérer les points t_k définis par :
$$\forall k \in \{0 \dots n\} \quad t_k = t_0 + kh.$$

c. Chercher à calculer des valeurs approchées y_k de la vraie solution y au point t_k en utilisant l'approximation $(\star)$ du tableau ci-dessous, qui donne la relation de récurrence suivante, puisque $t_k + h = t_{k+1}$:
$$(R) \quad y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k) \quad 0 \leq k \leq n-1$$

d. Considérer que y_k est une valeur approchée de $y(t_k)$:
$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \quad y_k \simeq y(t_k).$$
En particulier, le dernier terme calculé y_n est une valeur approchée de $y(T)$.

La relation (R) nous dit donc qu'il suffit de calculer les termes consécutifs de la suite récurrente $(y_k)_{0\leq k\leq n}$ connaissant la condition initiale y_0.

À retenir. En pratique il suffit d'appliquer les règles de substitution suivantes pour obtenir le schéma d'Euler associé au problème (S). On dit alors que l'on a discrétisé l'équation différentielle :

Objet exact	devient
Intervalle $[t_0, t]$	Ensemble fini $\{t_0, \dots, t_n\}$ $t_k = t_0 + kh$ $h = \dfrac{T - t_0}{n}$
Fonction $y = y(t)$	Suite $(y_k)_{0\leq k\leq n}$
t	t_k
$y(t)$	y_k
$y'(t)$	$\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h}$
$y(t)$	$\simeq y(t_k)$
$y' = F(t, y)$	$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$

Implémentation. En exemple, le code pour trouver une solution approchée de l'équation : $y'(t) = \dfrac{y(t)}{t^2}$ sur $I = [1, 2]$ avec condition initiale $y(1) = 2$.

Code Python ▼

```
1  import matplotlib.pyplot as plt
2  F = lambda t,y : y/t**2
3  t0,T = 1,2    # L'intervalle
4  n = 10 # Nb de pts de la subdiv.
5  h = (T-t0)/n   # Son pas
6  y0 = 2         # Condition initiale
7  Lt,Ly = [t0],[y0]
8  for k in range(n):
9      t,y =Lt[-1], Ly[-1]
10     y+=h*F(t,y) # Le yk suivant
11     t+=h*1      # Le tk suivant
12     Lt.append(t)
13     Ly.append(y)
```

Rem.10 | ☠ Lignes 10-11 : actualiser y (c'est-à-dire calculer y_{k+1}) **avant** d'actualiser t, puisque t_k intervient dans le le calcul de y_{k+1} !