Développements limités

Rappels et Notations

- Notion de voisinage d'un réel.
- Notations de Landau
- Échelle de croissance des monômes en 0.

- $0! = 1! = 1$,
$2! = 2$, $3! = 6$,
$4! = 24$, $5! = 120$.
- $\forall \alpha \in \mathbf{R} \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

I DL des fonctions usuelles à l'origine

⋆ : à connaître par cœur

⋆	e^u	$\underset{u\to 0}{=}$	$1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$
⋆	$\sin u$	$\underset{u\to 0}{=}$	$u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o(u^6)$
⋆	$\cos u$	$\underset{u\to 0}{=}$	$1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^5)$
	$\frac{1}{1-u}$	$\underset{u\to 0}{=}$	$1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$
⋆	$\frac{1}{1+u}$	$\underset{u\to 0}{=}$	$1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$
⋆	$\ln(1+u)$	$\underset{u\to 0}{=}$	$u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$
	$\ln(1-u)$	$\underset{u\to 0}{=}$	$-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$
⋆	$(1+u)^\alpha$	$\underset{u\to 0}{=}$	$1 + \alpha u + \binom{\alpha}{2} u^2 + \binom{\alpha}{3} u^3 + o(u^3)$
	$\sqrt{1+u}$	$\overset{\alpha=\frac{1}{2}}{\underset{u\to 0}{=}}$	$1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$
	$\frac{1}{\sqrt{1+u}}$	$\underset{u\to 0}{=}$	$1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + o(u^3)$

II Développement limité

A) Définition

[$DL_n(0)$ de f] Déf.1

Relation de la forme :

$$f(x) = \underbrace{P(x)}_{\text{partie régulière du DL}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{résidu}} \quad x \to 0$$

où : $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Typ. Polynôme

L'entier n s'appelle précision du DL

Rem.1

a. Un DL est donc une notion **locale**.

b. Plus n est élevé, meilleure est l'approximation de $f(x)$ par $P(x)$ d'après l'échelle de croissance des monômes en 0.

c. L'approximation reste **locale** : l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $P(x)$ est négligeable devant x^n, *pour peu que l'on reste sur un certain voisinage* de 0. Le résidu ne dit *rien* sur la taille de ce voisinage.

$T_1>$ En pratique, les DL se calculent par opérations sur les DL usuels à apprendre. On ne calcule jamais (ou alors cas exceptionnels) par dérivations successives de f le DL_n de f.

[$DL_n(x_0)$] Déf.2

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathscr{D}_f$ La fonction f admet un $DL_n(x_0)$ si et seulement si la fonction $g : h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un $DL_n(0)$.

$T_2>$ En pratique, pour calculer un $DL_n(x_0)$ de f :

a. On effectue le changement de variables $x = x_0 + h$, $h \to 0$, puis on obtient :

$$x \to x_0 \quad f(x) \underset{x=x_0+h}{=} g(h).$$

b. On caclule ensuite un $DL_n(0)$ de la nouvelle expression obtenue et dépendant de h, $g(h)$:

$$g(h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n).$$

c. Enfin, on revient à la variable x :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 &+ a_1(x - x_0) \\ &+ \ldots \\ &+ a_n(x - x_0)^n \\ &+ o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

[Lien avec la régularité en $x_0 \in \mathscr{D}_f$] Thm.1

a. f admet un $DL_0(x_0)$ $\Leftrightarrow$ f est continue en x_0

b. f admet un $DL_1(x_0)$ $\Leftrightarrow$ f est dérivable en x_0

c. ☠ f admet un $DL_1(x_0)$ $\not\Rightarrow$ f est $\mathscr{C}^1$ en x_0

Rem.2 Si $x_0 \notin \mathscr{D}_f$, les limites sont prises quand $x \underset{\neq}{\to} x_0$. Dans ce cas :

a. $\Leftrightarrow$ f est prolongeable par continuité en x_0.

b. $\Leftrightarrow$ f est prolongeable par continuité en x_0 et ainsi prolongée, la fonction obtenue est carrément dérivable en x_0.

B) Formule de Taylor-Young

[Régularité des fonctions usuelles] Thm.2

Les fonctions usuelles sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité.

[Polynôme de Mac-Laurin] Déf.3

Pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ en 0, le polynôme de Mac-Laurin de f d'ordre n est :

$$P_f := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

[Formule de Taylor-Young] Thm.3

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ en 0 alors f admet un $DL_n(0)$ donné par son polynôme de Mac-Laurin :

$$f(x) = P_f(x) + o(x^n) \quad x \to 0.$$

En particulier, les fonctions usuelles dérivables en 0 admettent des DL à tous ordres.

III Opérations sur les DL

Les DL sont tous faits en 0 dans ce qui suit

A) Notations

[Notations,valuation] Déf.4

a. On note pour toute fonction f admettant un DL_n, $R^{eg}_{n,f}$ la partie régulière du DL_n de f. Typ. Polynôme

b. Pour un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, on note $\{P\}_n$ sa troncature de degré n

c. La *valuation* d'un polynôme non nul P est le degré de son monôme de plus bas degré. On la note $\mathrm{val}(P)$.

Rem.3

a. Exemple de troncature à l'ordre 3 : $\{2 - X + X^4\}_3 = 2 - X$.

b. $\mathrm{val}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{monôme de} \\ \text{plus bas degré}}}{-6X} + 3X^2 - X^5) = 1$.

B) Unicité

[unicité du DL] Thm.4

Le $DL_n(0)$ est unique, au sens où la partie régulière l'est.

$T_3>$ Une application très utile est la considération de la parité pour la prévision de l'ordre du calcul.

c) Troncature

> *[trocncature]* **Thm.5**
>
> Si f admet un DL_n alors f admet un DL_p pour tout entier $p \leq n$. La partie régulière de ce DL est $\left\{R^{eg}_{n,f}\right\}_p$.

d) Opérations

Les ordres donnés sont des ordres suffisants pour atteindre la précision de DL souhaitée.

Données : f,g fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Opération	Partie régulière du DL_n
$f+g$ **Somme**	$R^{eg}_{n,f} + R^{eg}_{n,g}$
$f \times g$ **Produit**	$\left\{R^{eg}_{n,f} \times R^{eg}_{n,g}\right\}_n$
☠ $g \circ f$, $f(0)=0$ **Composition**	$\left\{R^{eg}_{n,g} \circ R^{eg}_{n,f}\right\}_n$
☠ $\dfrac{1}{f}$, $f(0) \neq 0$ **Inverse**	Composer le DL_n de f avec celui de $\dfrac{1}{1+v}$, $v \to 0$
$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ **Primitivation**	$\underset{\boxed{!!!}}{\underset{\uparrow}{F(0)}} + \int_0^x R^{eg}_{n-1,f}\mathrm{d}t$

☠ : *Condition de compatibilité des DL à vérifier*

Rem.4 | Pour la primitivation des DL, on gagne un ordre de précision en primitivant. Attention à intégrer de 0 à x, et donc de ne pas oublier la constante $F(0)$ en intégrant la partie régulière !

T4> Pour calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g(f(x))$:

a. On commence par «l'intérieur» en effectuant un $DL_n(0)$ de $u = f(x)$:

$$f(x) = u = R^{eg}_{n,f}(x) + o(x^n) \qquad (1)$$

b. ☠ (*condition de compatibilité*) : on peut composer avec le DL(0) de g si $f(0) = 0$. Sinon, c'est le DL$(f(0))$ de g qu'il faut.

c. Ensuite, effectue le DL(0) de g avec la variable u à l'ordre suffisant (voir lemme fondamental **Thm 6.d.**) :

$$g(\underbrace{f(x)}_{u}) \underset{u \to 0}{=} R^{eg}_{n,g}(u) + o(u^n) \qquad (2)$$

d. On substitue en réinjectant (1) dans (2). Il y a assez peu de calculs contrairement aux apparences !

T5> Pour le DL de l'inverse, même principe :

a. on part du DL(0) de $v = f(x)$:

$$v{=}f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + o(x^n)$$

b. Comme $f(0) = a_0$, on peut considérer localement $1/f$ si $a_0 \neq 0$.

c. Dans ce cas, on substitue $f(x)$ par son DL dans $\dfrac{1}{f}$:

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{a_1}{a_0}x + \cdots + o(x^n)}_{=u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}}$$

d. $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0} \times \underbrace{\dfrac{1}{1+u}}_{g(u)}$ et on effectue le DL de $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre convenable (voir **Thm 6.d.**)

En pratique, on rencontre dans la majorité les calculs suivants dont les résultats sont donnés ici (pour aide, mais pas à retenir) :

$$(1+\alpha x+\beta x^2+o(x^2))(1+\alpha' x+\beta' x^2+o(x^2))$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 + (\alpha+\alpha')x + (\alpha\beta'+\alpha'\beta)x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1+\alpha x+\beta x^2+o(x^2)}$$
$$= 1 - \alpha x + (\alpha^2 - \beta)x^2 + o(x^2)$$

e) Économie de l'ordre dans les calculs

> *[Lemme fondamental]* **Thm.6**
>
> Mettons que le $\mathrm{DL}_n(0)$ est donné par :
>
> $$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + \cdots + o(x^n) \quad a_p \neq 0.$$
>
> Si $p > 0$ (*i.e.* val$\left(R^{eg}_{n,f} > 0\right)$), alors :
>
> **a.** $u = f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
>
> **b.** $u \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$
>
> **c.** $u^r \underset{x\to 0}{\sim} a_p^r x^{pr}$
>
> **d.** $o(u^r) \underset{x\to 0}{=} o(x^{pr}) \leftarrow$ Ultra-utile !
>
> En particulier, dans la composition des DL, un DL_r de $g(u)$ tel que $pr \geq n$ suffit à un obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g \circ f$.

T6> Pour les produits, si on veut un calculer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de fg, on économise des ordres dès qu'une partie régulière a une valuation non nulle :

f	g
$P := R^{eg}_{n,f}$	$Q := R^{eg}_{n,g}$
$\deg(P) = n$	$\deg(Q) = n$
$\mathrm{val}(P) = p$	$\mathrm{val}(Q) = q$

Un $\mathrm{DL}_{n-q}(0)$ de f et un $\mathrm{DL}_{n-p}(0)$ de g suffisent.

IV Application des DL

a) Équivalents

> T7> *D'après* **Thm. 6.b**, *le premier terme non nul du DL donne un équivalent.*

☠ Si la limite d'une fonction f est infinie, un DL ne donnera **jamais** d'équivalent, puisque pour $p \in \mathbf{N}$, x^p n'a **jamais** une limite infinie en 0 quand $x \to 0$.

b) Signe d'une fonction au voisinage de 0

> T8> *Le premier terme non nul du DL de $f-g$ donne localement le signe de $f-g$*

En effet, ce terme donne un équivalent, et deux fonctions équivalentes sont du même signe.

$$f(x) - g(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + o(x^p) \quad a_p \neq 0$$

c) Équation de la tangente

> T9> *Le $DL_1(0)$ de f donne l'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et le premier terme* ***non nul*** *suivant donne la position relative* ***localement***.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{a_0 + a_1 x}_{(\mathscr{T}):y=a_1x+a_0} + \underbrace{a_q x^q}_{\substack{a_q\neq 0\\ \text{détermine la}\\ \text{position relative}}} + o(x^q)$$

Rem.5 | Les coefficients a_0, a_1 peuvent être nuls.

d) Recherche d'une asymptote oblique

T10> Si $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, et si l'on soupçonne l'existence d'une asymptote oblique :

a. On pose $x = \dfrac{1}{h} \to 0^{\pm}$: $f(x) \underset{x=\frac{1}{h}}{=} g(h)$

b. On effectue un DL à trois termes de $hg(h)$:

$$hg(h) \underset{h\to 0}{=} A + Bh + \underbrace{a_q h^q}_{a_q \neq 0} + o(h^q)$$

c. On revient à x :

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \underbrace{Ax + B}_{\substack{\text{détermine}\\ \text{l'asymptote}}} + \underbrace{\frac{a_q}{x^{q-1}}}_{\substack{\text{position}\\ \text{relative}}} + o\left(\frac{1}{x^{q-1}}\right)$$

Rem.6 | B est peut-être nul, mais si vous aviez détecté que $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, vous ne pouvez avoir $A = 0$.