Calcul intégral

Notations Rappels

- I : intervalle. f : fonction dans $\mathscr{C}^0(I)$.
- On est dans la **théorie régulière de l'intégration** : pas d'intégrale impropre ici.
- $x \mapsto \int^x f(t)\mathrm{d}t$ désigne une primitive de f sur I et $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ désigne **la** primitive de f sur I nulle en a.

I Primitive

[Primitive Typ. fonction*]* **Déf.1**

Soit $f : I \to \mathbf{K}$. Une primitive de F **sur** I est une fonction vérifiant 3 conditions :

a. F est définie sur I.

b. F est dérivable sur I.

c. $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$.

[Structure de l'ensemble des primitives sur un intervalle] **Thm.1**

Si I est un **intervalle** et si $f \in \mathscr{C}^0(I)$. Alors :

a. f admet une infinité de primitives sur I.

b. Elles se déduisent d'**une** primitive particulière de f sur I par addition d'une constante dans $\mathbf{K}$ arbitraire.

Rem.1

a. Toute primitive F de f dans ce cas vérifie $F' = f$ donc est de classe $\mathscr{C}^1$.

b. On trouve **une** primitive particulière par les méthodes de primitivation.

c. Ne pas confondre primitive Typ. fonction et intégrale Typ. Scalaire.

Rem.2 ☠ Si I n'est pas un intervalle, le théorème 1 est faux.

II Méthodes de primitivation

T_1> Pour trouver toutes les primitives d'une fonction f donnée : on se place sur un intervalle de continuité de f. On vérifie qu'elle y est continue. On calcule **une** primitive de f par les méthodes du II. On conclut en appliquant **Thm 1. b.**

A) Tableau des primitives usuelles

Fonction $f : I \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ $f(x) =$	Intervalle I	Primitive particulière
x^α $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\ln\lvert x\rvert$
$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$	$\sqrt{x}$
e^{mx} $m \in \mathbf{C}^*$	$\mathbf{R}$	$\frac{1}{m}e^{mx}$
$\cos mx$ $m \in \mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}$	$\frac{1}{m}\sin mx$
$\sin mx$ $m \in \mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}$	$-\frac{1}{m}\cos mx$
$\frac{1}{x^2+1}$,	$\mathbf{R}$	$\arctan x$

B) Primitivation à vue

Fonction $f : I \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ $f(x) =$	$u \in \mathscr{C}^0, u(x) \in$	Primitive particulière
$u(x)^\alpha \times u'(x)$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\in]0, +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1}u(x)^{\alpha+1}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\frac{1}{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\mathbf{R}_+^\star$	$\sqrt{u(x)}$
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$\mathbf{R}$	$e^{u(x)}$
$\cos u(x) \times u'(x)$	$\mathbf{R}$	$\sin u(x)$
$\sin u(x) \times u'(x)$	$\mathbf{R}$	$-\cos u(x)$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\mathbf{R}$	$\arctan u(x)$

T_2> On essaie de reconnaître une expression en la fonction étudiée du type $u' \times f(u)$ où u est une **fonction**. On peut essayer aussi de se ramener à une telle forme en passant d'abord par un changement de variables.

C) Intégration par parties

[Intégration par parties] **Thm.2**

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

T_3> ☠ Ne pas oublier de préciser avant d'effectuer une IPP de vérifier que u et v sont $\mathscr{C}^1$.

D) Changement de variables

[Reparamétrage] **Thm.3**

Si $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$, F est une primitve de F sur $[a, b]$ et φ une fonction continue à valeurs dans $[a, b]$:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\mathrm{d}t = [F(\varphi(t))]_a^b.$$

Rem.3 Dans cette forme du théorème, il n'est pas nécessaire que φ soit bijective.

T_4> Il est impératif de savoir effectuer un changement de variables

[Conséquences du changement de variables] **Thm.4**

Si I est supposé symétrique par rapport à 0, et $a \in I0$:

$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si} f \text{ est paire} \\ 0 & \text{si} f \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Si f est T-périodique sur I

a. Si $[a, b] \subset I$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Si $a \in I$, on a : $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$

III Intégrale de $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$

Continuité + Segment : pas d'intégrale impropre

A) Définition

[Intégrale Typ. scalaire] **Déf.2**

L'intégrale de $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ est par définition le nombre $S = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Par primitivation il vaut donc $F(b) - F(a)$ où F est *n'importe quelle* primitive de f sur $[a,b]$ (le calcul donnera toujours le même résultat pour S).

Rem.4 Dans la notation intégrale S, la variable t est *muette*. En particulier, la valeur de S **ne dépend jamais de** t.

B) Propriétés de l'intégrale

[Propriétés] **Thm.5**

Si f, g sont deux fonctions $\mathscr{C}^0([a,b])$ et si λ et μ ,c sont trois constantes :

- **a.** $\int_a^b 0\mathrm{d}t = 0$
- **b.** $\int_a^b \mathrm{d}t := \int_a^b 1\mathrm{d}t = b - a$
- **c.** (Chasles)
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$
- **d.** (Linéarité)
$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f + \mu g &= \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \\ &+ \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$
- **e.** (Positivité) Si f est positive sur $[a,b]$ et $a \leq b$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$
- **f.** (Croissance) Si $f(t) \leq g(t)$ pour $t \in [a,b]$ et $a \leq b$:
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$
- **g.** (Inégalité triangulaire). Si $a \leq b$:
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

Si f est positive et continue sur $[a,b]$:
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$$

IV Fonctions définies par une intégrale

A) Données

- **a.** $f \in \mathscr{C}^0(I)$, I est un intervalle, et u, v sont deux fonctions à valeurs dans I.
- **b.** Φ est une fonction définie par :
$$\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

B) Existence de Φ

*[Condition **suffisante** d'existence du nombre $\Phi(x)$]* **Thm.6**

Si le segment d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$ est contenu dans un **intervalle de continuité** de f, alors $\Phi(x)$ existe (Typ. nombre) en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue. Autrement dit dans ce cas, $x \in \mathscr{D}_\Phi$.

C) Dérivabilité de Φ

[Dérivabilité et calcul] **Thm.7**

- **a.** Si les fonctions u et v sont dérivables et à valeurs dans un intervalle de continuité J de f alors Φ est dérivable en tout point de I.
- **b.** De plus, en notant F une primitive de f sur J :

$\Phi(x) = [F(t)]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$.
Si bien que $\Phi = F \circ v - F \circ u$ est dérivable et : $\Phi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

- **c.** En particulier, si u et v sont $\mathscr{C}^1$, Φ aussi.

[Cas particulier] **Thm.8**

Si $f \in \mathscr{C}^0(I)$, et $\bullet$ un réel quelconque dans I, alors :

- **a.** $F : x \mapsto \int_\bullet^x f(t)\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1(I)$.
- **b.** $\forall x \in I\ F'(x) = f(x)$

V Théorème de la moyenne

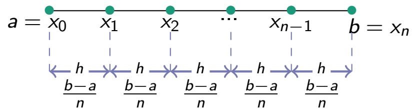
A) Énoncé

[Théorème de la moyenne] **Thm.9**

- **a.** Si $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et si on pose :
$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
alors (A_n) converge vers $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
- **b.** Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ et si on pose :
$$A_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f(\underbrace{a+kh}_{x_k}),\ \text{où } h = \frac{b-a}{n}$$
alors (A_n) converge vers $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Rem.5

- **a.** Le point **b.** est une généralisation de **a.** puisqu'on obtient **a.** en appliquant **b.** avec $a = 0$ et $b = 1$.
- **b.** Le nombre A_n est la moyenne des valeurs de f prises sur les n points $x_0, \dots, x_{n-1}$ régulièrement répartis dans $[a, b[$ en partant de $a = x_0$.



B) Somme de Riemann

[Somme de Riemann] **Déf.3**

Le nombre A_n dans **Thm.9** s'appelle somme de Riemann de f sur le segment $[a,b]$.

Rem.6 Le théorème de la moyenne affirme que les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f.

$T_5>$ Pour des suites définies par des sommes, le fait de reconnaître une somme de Riemann permet de trancher directement sur sa nature.

$T_6>$ Le théorème de la moyenne permet de calculer de manière approchée la valeur d'une intégrale classique $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par la **méthode des rectangles de pas h** :

```python
# Pour f C0 sur [a,b]:
import numpy as np
def integrale(f,a,b,h):
    S = 0
    for x in np.arange(a,b,h):
        S+=h*f(x)
    return S
```

Rem.7 Le lien entre le pas h de la méthode et le nombre de points n définissant la subdivision de $[a,b]$ est : $h = (b-a)/n$, donc $n = \lfloor (b-a)/h \rfloor$.