Bases de logique

Cadre	• Cette fiche est le **B-A BA** du cours de première année. • Elle n'est pas exhaustive.	• La logique est la base du raisonnement. Sans raisonnement, pas de mathématiques sérieuses, ni de science !

I Généralités

- Une assertion est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.
  Exple.1
  a. «Michael Jackson est mort» est une assser-tion.
  b. «Asseyez-vous !» n'en est pas une.
- La valeur logique d'une assertion est «vrai» ou «faux».
  Exple.2
  a. «Michael Jackson est mort» : vrai.
  b. « 1+1 = 10» : faux.
- En **`Python`**, les instructions booléennes jouent le rôle des assertions.
- `True` et `False` sont les valeurs des instructions booléennes.

console
```
In [1]: 1+1==10
Out[1]: False
```

- Les règles de logique permettent de calculer la valeur logique d'une assertion fabriquée à partir d'assertions dont la valeur logique est connue et coordonnées par des opérateurs logiques.
  Exple.3
  a. «Paris est la capitale de la France» est une assertion vraie.
  b. «Rennes est en Île-de-France» est une assertion fausse.
  c. Si on coordonne ces deux assertions par l'opératuer «et», on obtient l'assertion : «Paris est la capitale de la France et Rennes est en Île-de-France », qui est fausse d'après les règles logiques sur le «et».
  d. Si on coordonne ces deux assertions par le «ou» logique, on obtient l'assertion : «Paris est la capitale de la France, ou Rennes est en Île-de-France », qui est vraie d'après les règles logiques sur le «ou».

II Énoncé à variables

A) Définition

Voir la fiche `Révisions 2` pour la définition de variable.

[*Énoncé à variables*] Déf.1
C'est une assertion $\mathscr{A}$ dans laquelle apparaît au moins une variable (on peut alors indiquer la dépendance de l'assertion par le nom des variables).

Intérêt : permet d'écrire en peu de mots une grande quantité (parfois même une infinité) d'énoncés !
Exple.4
a. $\mathscr{A}(x,y)$: «$x-y$ est positif.».
b. $\mathscr{A}(f)$: «f est continue».
c. $\mathscr{A}(A)$: «A est de probabilité au plus 1/2».

B) Quantification

- **Règle.** Dans un énoncé à variables, *toute variable* doit être quantifiée. Les énoncés de l'exemple **Exple.4** sont donc incomplets.
- **Quantificateurs.** Il n'existe que deux quantificateurs :
  a. Le quantificateur universel $\forall$.
  b. Le quantificateur existentiel $\exists$.
- **Usage.** Il n'y a que deux syntaxes possibles

Énoncé	Traduction en français
$\forall x \in E \quad \mathscr{A}(x)$	Chaque fois qu'on remplace x par un élément de E, il est vrai que $\mathscr{A}(x)$.
$\exists x \in E \quad \mathscr{A}(x)$	Pour au moins une valeur de x dans E, $\mathscr{A}(x)$ est vrai (mais l'énoncé ne dit *ni combien de valeurs ni lesquelles*).

Exple.5
a. $\forall x \in \mathbf{N} \quad \underbrace{x^2-2x+1 \geq 0}_{\mathscr{A}(x)}$. Cela veut dire : tous les énoncés suivants sont vrais :
1) $(\mathscr{A}(0)) : 0^2-2\times 0+1 \geq 0$.
2) $(\mathscr{A}(1)) : 1^2-2\times 1+1 \geq 0$.
3) $(\mathscr{A}(2)) : 2^2-2\times 2+1 \geq 0$.
4) ...

b. $\exists x \in \{0,1,2,3,4\} \quad \underbrace{x^2-3x+2\geq 0}_{\mathscr{A}(x)}$. Cette phrase signifie : au moins un des énoncés suivants est vrai (mais pour savoir le(s)quel(s), il faut les vérifier un par un) :

1) $(\mathscr{A}(0)) : 0^2-3\times 1+2=0$.
2) $(\mathscr{A}(1)) : 1^2-3\times 2+2=0$.
3) $(\mathscr{A}(2)) : 2^2-3\times 3+2=0$.
4) $(\mathscr{A}(3)) : 3^2-3\times 3+2=0$.
5) $(\mathscr{A}(4)) : 4^2-3\times 3+2=0$.

III Base de la déduction

A) Implication

[Implication] **Déf.2**

Si $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont deux assertions, l'assertion $[(\mathscr{P})$ *implique* $(\mathscr{Q})]$ est l'assertion : $\mathscr{Q}$ ou $\overline{\mathscr{P}}$. Elle se note :

$$\underset{\text{la prémisse}}{\underset{\uparrow}{(\mathscr{P})}} \quad \Rightarrow \quad \underset{\text{la conclusion}}{\underset{\uparrow}{(\mathscr{Q})}}$$

Valeur logique de $(\mathscr{P}) \Rightarrow (\mathscr{Q})$ en fonction de celles de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$

$(\mathscr{Q})$ \ $(\mathscr{P})$	**Vrai**	**Faux**
Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

Ainsi, une implication est toujours vraie sauf si la prémisse est vraie et sa conclusion fausse

Rem.1

a. C'est logique (!) : le seul cas où une déduction est fausse est celui où l'on affirme quelque chose de faux à partir de quelque chose de vrai.

b. Ne pas confondre la valeur de vérité d'une implication avec celle de sa conclusion !

Exple.6

a. Si Rome est la capitale de la France alors Rome est la capitale de l'Italie : déduction **vraie**

b. Si Paris est la capitale de la France alors Rome est la capitale de l'Italie : déduction **vraie**

c. Si Rome est la capitale de la France alors Paris est la capitale de l'Italie : déduction **vraie**

d. Si Paris est la capitale de la France alors Paris est la capitale de l'Italie : déduction **fausse**

B) Contraposition

[Contraposée d'une assertion] **Déf.3**

La contraposée de l'assertion $(\mathscr{P}) \Rightarrow (\mathscr{Q})$ est l'assertion $(\overline{\mathscr{Q}}) \Rightarrow (\overline{\mathscr{P}})$.

Rem.2

a. Ce sont deux assertions synonymes. Elles ont donc la même valeur logique.

b. $T_1>$ Il est parfois plus facile de prouver la contraposée d'une implication que l'implication elle-même.

Exple.7

- Considérons l'énoncé à variable $\mathscr{A}(x)$: « *Si x est un corbeau alors x est noir.* » La contraposée de $\mathscr{A}(x)$ est : « *Si x n'est pas noir, x n'est pas un corbeau.*» Il est donc logiquement équivalent de prouver que tous les corbeaux sont noirs que de prouver que tout ce qui n'est pas noir n'est pas un corbeau.
- **Application statistique :** (paradoxe de l'ornithologue de chambre) Chaque fois que l'ornithologue de chambre trouve un objet non-noir qui est un non-corbeau, il est de plus en plus fondé à penser que tous les corbeaux sont noirs (alors qu'il n'a même pas examiné le moindre corbeau en restant chez lui).

IV Lois de Morgan

[Lois de Morgan] **Prop.1**

Comportement des assertions vis-à-vis de la négation :

a. $\overline{\mathscr{A} \text{ et } \mathscr{B}} = \overline{\mathscr{A}} \text{ ou } \overline{\mathscr{B}}$

b. $\overline{\mathscr{A} \text{ ou } \mathscr{B}} = \overline{\mathscr{A}} \text{ et } \overline{\mathscr{B}}$

c. $\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \mathscr{A}$

d. $\left[\overline{\forall x \in E \quad \mathscr{A}(x)}\right] = \left[\exists x \in E \quad \overline{\mathscr{A}(x)}\right]$.

e. $\left[\overline{\exists x \in E \quad \mathscr{A}(x)}\right] = \left[\forall x \in E \quad \overline{\mathscr{A}(x)}\right]$.

f. $\left[\overline{\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}}\right] = \left[\mathscr{A} \text{ et } \overline{\mathscr{B}}\right]$.

Exple.8

a. La négation logique de «tous les jours de l'année il pleut» est : «il y a au moins un jour de l'année où il ne pleut pas.»

b. La négation logique de «Un des élèves de la classe est une fille» est : «Tous les élèves de la classe sont des non-filles».

c. La négation de «Si Alice est en prépa, alors elle a son bac» est : « Alice est en prépa, et [pourtant] elle n'a pas son bac.»