Formalisme des ensembles

Cadre

- Cette fiche est le **B-A BA** du cours de première année.
- Elle n'est pas exhaustive.
- C'est le vocabulaire de base destiné à écrire et comprendre des énoncés mathématiques qui ont du sens.

I Vocabulaire des ensembles

a) Objet

[Objet] **Déf.1**
Tout ce que vous pouvez imaginer pourvu qu'il soit identifié sans ambiguité.

Rem.1 | C'est ce qui fait la portée générale des mathématiques. Beaucoup de choses peuvent entrer dans la théorie.

Exple.1 |

- **a.** Le nombre 1, la tour Eiffel, l'intervalle $[0, 1]$ sont des objets.
- **b.** L'ensemble constitué du nombre 2 seul (noté $\{2\}$ voir plus loin), est aussi un objet.
- **c.** En revanche : «la table» n'est pas un objet. On ne sait pas de quelle table il s'agit.

b) Ensemble

[Ensemble, élément] **Déf.2**
C'est une collection d'objets. Les objets de l'ensemble sont alors appelés les éléments de l'ensemble.

c) Appartenance

$x \in E$ siginifie : x est un élément de l'ensemble E.

Rem.2 | À droite du symbole $\in$, il y a donc **obligatoirement** un ensemble.

Exple.2 |

- **a.** $\mathbf{R} \in \{3, \pi, \text{la tour Eiffel}, \mathbf{R}\}$. Ceci est vrai puisque : dans l'énumération des objets qui constituent l'ensemble, on trouve bien $\mathbf{R}$.
- **b.** La phrase : «$x \in 2$» est incorrecte : 2 n'est pas un ensemble.
- **c.** $\{2\} \in \mathbf{R}$. Ceci est faux : si on listait les éléments de l'ensemble des réels $\mathbf{R}$, on ne trouverait pas l'objet $\{2\}$ (mais on trouverait l'objet 2).

Rem.3 | ☠ Ne pas confondre avec l'inclusion $\subset$, symbole pour lequel apparaissent **obligatoirement de part et d'autre des ensembles.**

d) Variable

[variable] **Déf.3**
Truc abstrait, représenté par un glyphe dans un énoncé, et qui peut prendre les valeurs d'un ensemble précisé. En général, une variable sert à écrire des énoncés généraux.

Rem.4 | Ce terme n'a pas le même sens en informatique, ou en probabilités (variable aléatoire), ou en statistique (variable statistique), ou en modélisation, ou en physique.

e) Lien entre notions ensemblistes et logiques

Notion ensembliste	**Opération logique correspondante**	**Quantification en termes d'appartenance**
Union ($\cup$)	ou (disjonction)	existentielle
Intersection ($\cap$)	et (conjonction)	universelle

Exple.3 |

- **a.** (Très utile en probas)

Forme Quantifiée	**Formulation ensembliste**	**Logique**
$\exists k \in \mathbf{N} \quad \omega \in A_k$	$\omega \in \bigcup\limits_{k \in \mathbf{N}} A_k$	$\omega \in A_0$ **ou** $\omega \in A_1$ **ou**...
$\forall k \in \mathbf{N} \quad \omega \in A_k$	$\omega \in \bigcap\limits_{k \in \mathbf{N}} A_k$	$\omega \in A_0$ **et** $\omega \in A_1$ **et** ...

- **b.** Si E est un ensemble fini à n éléments, par exemple $E = \{x_1, \dots x_n\}$, en écrivant $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\}$, on a :

$$x \in \{x_1, \dots x_n\} \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \text{ ou } \dots x = x_n.$$

T$_1$> Évite ainsi les erreurs dans la résolution d'équations, ou dans l'écriture d'évènements en probabilités.

- **c.** ☠ $x = \pm a$ est un abus d'écriture pour $x \in \{-a, a\}$, c'est-à-dire pour signifier : $x = -a$ **ou** $x = a$.

II Les 3 modèles pour définir une ensembles

Si les ensembles que vous définissez ne respectent aucun des ces trois modèles, votre définition ne veut **rien** dire

A) Modèle 1 : définition par énumération

Modèle 1 : $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

On donne la liste exhaustive des éléments de l'ensemble, délimitée par des accolades.

Exple.4 $E = \{3, 1/2, \pi, -1, \text{la tour Eiffel}\}$

Rem.5 Dans un ensemble, les répétitions des éléments sont indifférentes. L'ordre dans lequel les éléments sont listés n'importe pas.

Exple.5

a. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

b. $\{2, 1, 1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

B) Modèle 2 : définition paramétrique ou en compréhension

Modèle 2 : $E = \{ \underbrace{f(t)}_{\text{expression}} \quad \underbrace{t}_{\substack{\text{variable}\\\text{descriptive}}} \in \underbrace{D}_{\text{domaine}} \}$

Rem.6

- La variable descriptive t définissant l'ensemble E **n'est pas quantifiée**.
- La variable descriptive est muette : autrement dit, l'ensemble ainsi défini **ne dépend pas de la variable utilisée** : $\{f(t) \quad t \in D\} = \{f(s) \quad s \in D\}$
- Les éléments de l'ensemble E sont définis à l'aide d'une variable descriptive, **amenée à prendre toutes les valeurs d'un ensemble donné** (appelé domaine). Cette variable descriptive joue rôle de paramètre.

Exple.6 Si la variable descriptive est t, et que son domaine est $D = \{2, 4, 6\}$, la relation :

$$E = \{(t-3)^2 \quad t \in D\}$$

est une description paramétrique d'un ensemble E. Par énumération, on voit que $E = \{1, 9\}$

Rem.7 **Attention :** dans l'ensemble E de **Exple. 6**, il y a **deux** éléments, malgré **trois** valeurs du paramètre distinctes du paramètre, voir **Exple. 5 b.** pour comprendre).

Rem.8 En **Python**, la définition des listes en compréhension repose sur le même procédé que la définition paramétrique, et en suit la syntaxe :

```python
# Liste L = [ln 1,ln 2,...,ln 10] :
L = [ log(t) for t in range1(1,11)]
```

Rem.9 Le modèle 1 est un cas particulier du modèle 2, puisque si $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ est un ensemble bâti sur le modèle, et si f est la fonction définie sur $D = \{1 \dots n\}$ par $f(t) = e_t$, on a bien $E = \{f(t) \quad t \in D\}$.

C) Modèle 3 : définition par équations

Modèle 3 : $E = \{ x \in D \quad f(x) = 0 \}$

Cela signifie : E est l'ensemble des éléments de D vérifiant l'équation $f(x) = 0$.

Rem.10

a. En général, on ne connaît pas les éléments de E, ils sont seulement décrits par une propriété qui les caractérise (en l'occurrence, ils sont les solutions d'une équation. Mais ils pourraient aussi être une définis comme solutions d'une inéquation, ou même un système d'(in)-équations).

b. Ainsi, les éléments de E sont données de manière implicite.

c. On comprend alors que résoudre une équation (ou un système d'(in)-équatons consiste, pour l'ensemble de ses solutions $\mathscr{S}$, à passer d'une description de type **modèle 3** à une description type **modèle 1/2.** : ce n'est donc pas facile en général (et parfois même impossible !).

Exple.7

a. $A = \{x \in \mathbf{R} \quad x^2 - 3x + 2 = 0\}$

b. $B = \left\{ x \in \mathbf{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{array} \right. \right\}$

c. $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \quad x - 2y + 3z = 0\}$

D) Lois de Morgan

[Lois de Morgan] **Prop.1**

Si A, B sont des ensembles :

a. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

c. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

d. $\overline{\overline{A}} = A$.

Rem.11

L'ensemble $A \setminus B$ est par définition l'ensemble $A \cap \overline{B}$. C'est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.