Variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini

Notations

- $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini.
- Sans précision, l'espace image de la VAR X est noté $X(\Omega) = \{x_1 < \cdots < x_n\}$

I Généralités

A) Notion de variable aléatoire réelle

[VAR] Déf.1
C'est une fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$

Rem.1 C'est l'objet mathématique qui décrit lors d'une expérience aléatoire l'association à toute observation $\omega \in \Omega$ d'un nombre. Typiquement : une grandeur mesurée sur une observation.

Exemple.
Expérience aléatoire : on choisit une ampoule dans un stock.
Variable aléatoire : on mesure la durée de vie de cette ampoule (T en heures).

B) Espace image

[Espace image] Déf.2
C'est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X :

$$X(\Omega) := \{X(\omega) \quad \omega \in \Omega\} \subset \mathbf{R}$$

C) Évènements associés à X

[évènement associé à X] Déf.3
On note $[X = x]$ l'évènement : la valeur de X observée à l'issue de l'expérience est x.

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad [X = x] \begin{cases} \subset \Omega \\ \in \mathscr{P}(\Omega) \end{cases}$$

D) Système complet d'évènements associé

[SCE associé à X] Thm.1
Les évènements $[X = x_k]$ quand x_k décrit $X(\Omega)$ est un système complet d'évènements, appelé SCE associé à X.

E) Loi d'une VAR

[Fondamental] Thm.2
La famille de réels $p_k = P([X = x_k])$ pour x_k décrivant $X(\Omega)$ est une fonction de masse sur $X(\Omega)$. Elle définit donc une mesure de probabilité P_X sur $X(\Omega)$, appellée la loi de X :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad P_X(\{x\}) := P([X = x])$$

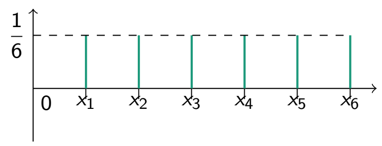
Rem.2 Ainsi $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)), P_X)$ est un espace probabilisé fini.

$T_1>$ En pratique, pour déterminer la loi de X :

a. Soit on reconnaît une loi usuelle et on justifie que X suit cette loi.
b. Soit on commence par déterminer $X(\Omega)$, puis on calcule par les théorèmes de calcul classiques la fonction de masse.

F) Représentation de la loi

On peut représenter graphiquement la loi d'une variable aléatoire par son peigne. Ci-contre, la loi d'une variable aléatoire X donnant le score affiché à l'issue de l'expérience consistant à lancer un dé équilibré :



On peut aussi se contenter de donner un tableau :

$x_k =$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

G) Fonction de répartition d'une VAR

[Fonction de répartition] Déf.4
C'est la fonction notée F_X définie sur $\mathbf{R}$ par [a]

$$F_X : \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ t \mapsto P(X \leq t) \end{array}$$

[a] $X \leq t$ est une notation pour désigner un évènement.

[Propriétés de F_X] Thm.3

a. F_X est définie sur $\mathbf{R}$, positive, à valeurs dans $[0, 1]$.
b. F_X est croissante.
c. En notant $X(\Omega) = \{x_1 < \cdots < x_n\}$:

$$\forall t < x_1 \quad F_X(t) = 0$$

$$\forall t \geq x_n \quad F_X(t) = 1$$

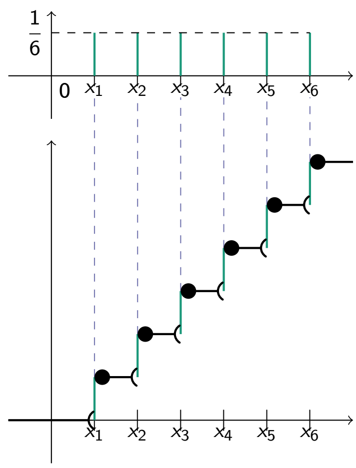
d. F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$.
e. F_X est continue sur $\mathbf{R} \setminus X(\Omega)$.
f. Pour tout réel x (et en particulier $X = x_k$) :

$$F_X(t) - \lim_{\substack{s \to t \\ <}} F_X(s) = P(X = t)$$

En particulier, la fonction de répartition de X «contient» la loi de X.

Rem.3
$T_2>$ Pour les variables aléatoires mesurant un maximum (ex : X mesure le plus grand score affiché lors du lancer de deux dés), il est plus facile de calculer F_X puis de déduire P_X que le contraire.

Ci-dessous la fonction de répartition de la variable X égale au score affiché lors du lancé d'un dé non pipé (avec son peigne pour que le lien entre les deux vous saute aux yeux) :



II Moments des variables aléatoires

A) Espérance

[Espérance, VAR centrée] Déf.5

a. C'est le réel
$$E(X) := \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$$

b. Si $E(X) = 0$, on dit que la variable X est centrée.

Rem.4 | Interprétation : C'est la valeur moyenne des observations de X si l'on a effectué un grand nombre de fois l'observation.

T_3> Pour calculer $E(X)$, soit on reconnaît une variable usuelle et on donne sa valeur, soit on calcule $E(X)$ à la main, et c'est la somme-produit des éléments de la loi de X.

[Propriétés de l'espérance] Thm.4

a. (*positivité*) Si X est à valeurs positives, $E(X) \geq 0$.

b. (*Homogénéité*) Si X est exprimée en unités u, $E(X)$. aussi.

c. (*Linéarité*) Si a, b sont réels :
$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

d. (*Croissance*) Si $X \leq Y$, alors :
$$E(X) \leq E(Y).$$

e. La variable $X - E(X)$ est centrée [a].

a. Elle est parfois notée $\overline{X}$

B) Formule de transfert

[Variable $f(X)$] Déf.6

Si f est une fonction dont le domaine contient au moins $X(\Omega)$, la fonction $f \circ X$ est définie, à valeurs réelles et est donc une variable aléatoire. Cette VAR se note $f(X)$.

[Formule de transfert] Thm.5

$$E(f(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k) P(X = x_k)$$

Rem.5 |

T_4> Intérêt de cette formule : même si la loi de $f(X)$ n'est pas calculée, son espérance peut se calculer dès lors que l'on connaît la loi de X.

C) Variance

[Variance, écart-type] Déf.7

a. La variance de X est le réel défini par :
$$V(X) := E(Y)$$
où Y est la variable définie (voir déf 6)
$$Y = [X - E(X)]^2$$

b. L'écart-type (ou unité d'écart, ou déviation standard [a]) de X est le réel défini par
$$\sigma_X := \sqrt{V(X)}$$

c. Si $\sigma_X = 1$, on dit que la variable X est réduite.

a. anglicisme

[Propriétés de la variance] Thm.6

a. (*Positivité*). $V(X) \geq 0$.

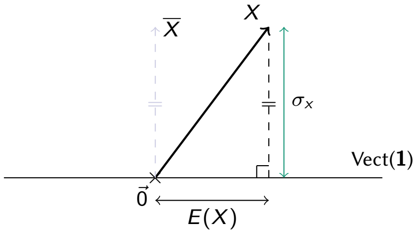
b. (*Homogénéité.*) Si X est exprimée en unités u, $V(X)$ est en unité u^2, et σ_X en unités u.

c. (*Homogénité et invariance par translation*). Si a, b sont deux réels :
$$V(ax + b) = a^2 V(X)$$

d. (*Formule de Koenig*).
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

e. (*Définition*). $V(X) = 0$ si et seulement si X est constante.

Rem.6 | Interprétation géométrique de la variance. L'ensemble des variables aléatoires sur Ω est un espace vectoriel de dimension $\#\Omega$. L'ensemble des variables aléatoires certaines est un sous-espace vectoriel de dimension 1 (engendré par la fonction **1** qui est la variable certaine de paramètre 1). Le carré de la norme d'un vecteur (une VAR) U est $E(U^2)$ On a le dessin suivant, sur lequel la formule de Koenig apparaît comme une reformulation probabliste du théorème de Pythagore :



T_5> Pour calculer une variance : ou bien on reconnaît une loi usuelle et on cite la formule, ou bien on la calcule à la main par la formule de Koenig, le premier terme $E(X^2)$ se calculant par la formule de transfert (c'est une simple somme-produit)

III Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

A) Inégalité de Markov

[Markov] Thm.7

Si X est une VAR positive et $\lambda > 0$ un réel, alors :
$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}$$

Rem.7 | Cette relation quantifie la probabilité d'un évènement rare comme «X prend de très grandes valeurs» (ce qui ne peut pas être trop le cas quand X est une variable prenant un nombre fini de valeurs).

B) Inégalité de Tchebychev

[Tchebychev] Thm.8

Soit $\alpha > 0$ Alors :

a. $P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$

b. $P(|X - E(X)| < \alpha) > 1 - \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$

Dit en unités d'écart : pour tout réel $u > 0$

a. $P(|X - E(X)| \geq u\sigma_X) \leq \dfrac{1}{u^2}$

b. $P(|X - E(X)| < u\sigma_x) > 1 - \dfrac{1}{u^2}$

Rem.8 | Interprétation : Ces inégalités sont universelles en termes d'unités d'écart (tout l'importance de l'écart-type comme paramètre de dispersion) et disent :

a. La probabilité que la valeur observée de X s'écarte de sa moyenne de plus de u unités σ_X ne peut pas dépasser u^2.

b. La probabilité que la valeur observée de X se trouve dans la fourchette $[E(X) - u\sigma_X, E(X) + u\sigma_x]$ est au moins égale à $1 - u^2$. Cet intervalle *s'appelle un intervalle de confiance pour $E(X)$ au seuil* $1 - u^2$ (ou au risque u^2)

Par exemple, pour toute variable aléatoire X, avec une probabilté au moins égale à 50%, on est certain que les valeurs observées de X sont dans la fourchette $[E(X) - \sqrt{2}\sigma_X, E(X) + x\sqrt{2}\sigma_X]$. Dit autrement, si on répète un grand nombre d'observations de X, environ 50% des valeurs observées de X *au moins* sont dans l'intervalle $[E(X) - \sqrt{2}\sigma_X, E(X) + \sqrt{2}\sigma_X]$.