Intégrales généralisées

Typologie

- Intégrande : la fonction sous l'intégrale
- Intégrale partielle : fonction de la borne : $x \mapsto \int^x f(t)dt$.
- Intégrale convergente : un réel.
- Si J est un intervalle de $\mathbf{R}$, $\mathbf{1}_J$ est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\mathbf{1}_J(x) = 1$ si $x \in J$, et $\mathbf{1}_J(x) = 0$ sinon.

I CLASSIFICATION DES INTÉGRALES

A) INTÉGRALES CLASSIQUES

[Fonction continue par morceaux sur un segment] **Déf.1**

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si :

- f est continue sur $]a, b[$ sauf au plus en un nombre fini de points $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.
- Sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$, f est la restriction à $]x_k, x_{k+1}[$ d'une fonction f_k continue sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Rem.1 |

- Pour de telles fonctions, le nombre $\int_a^b f(t)dt$ n'est pas une intégrale généralisée (programme de sup). Elle vaut par définition :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^n \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)dt}_{\text{intégrale d'une fonction continue sur un segment}}$$

- On peut toujours considérer une fonction définie sur $[a, b]$ comme une fonction définie sur $\mathbf{R}$ en la supposant nulle en dehors de $[a, b]$, autrement dit, en remplaçant f par $f \times \mathbf{1}_{[a,b]}$ (et en convenant que $0 \times ? = 0$)

Exple.1 | $\int_0^3 \mathbf{1}_{[1,2]}(t)dt$ est l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[0, 3]$.

Avant de manipuler une intégrale, on commence toujours par la qualifier, c'est-à-dire si elle est classique ou non

B) INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Ce sont les intégrales non classiques.

[Existence d'impropriétés] **Cor.1**

Les impropriétés éventuelles d'une intégrale impropre ne peuvent se trouver qu'aux points suivants :

- En $-\infty, +\infty$.
- Aux points réels a tels que $f_{]a,b]}$ ne peut pas se prolonger par continuité en a .
- Aux points réels b tels que $f_{[a,b]}$ ne peut pas se prolonger par continuité en b .

Rem.2 | Les impropriétés s'étudient une par une et séparément.

T1> En une impropriété réelle $\bullet$, on commencera **toujours** par étudier l'**intégrande** (et pas l'intégrale!), et chercher à voir si l'intégrande admet une limite réelle en $\bullet$. Dans ce cas l'intégrale est dite **faussement impropre en $\bullet$** . Si la limite n'est pas réelle, on a une intégrale impropre et on se tourne vers les méthodes du III.

Exple.2 |

- $\int_0^\pi \frac{\cos t}{|\cos t|} dt$. Faussement impropre en $b = \pi/2$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$. Faussement impropre en $a = 0$.

II PROPRIÉTÉS FONCTIONNELLES DE L'INTÉGRALE

- Relation de Chasles.** Peut s'utiliser sur une intégrale impropre dès lors qu'on a prouvé sa convergence (et pas avant).
- Structure vectorielle.** L'ensemble des fonctions admettant une inté-

grale généralisée convergente sur I est un espace vectoriel dès lors :

- Linéarité.** $\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$. Utilisable dès lors que deux des trois intégrales intervenant dans la relation sont convergentes.

- Positivité et croissance.** En cas de convergence :

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow 0 \leq \int f \leq \int g$$

- Inégalité triangulaire.** En cas d'absolue convergence, les termes apparaissant dans la formule ont un sens et :

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

- Nullité.** Pour des intégrales de fonctions positives, mais pas forcément continues $\int f = 0 \Rightarrow f$ est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points.

- Parité.** Si f est paire ou impaire, alors $S = \int_{-A}^A f$ et $T = \int_0^A f$ sont de même nature. En cas de convergence, si f est paire : $S = 2T$, sinon $S = 0$.

III MÉTHODES D'ÉTUDE DE $\int^\bullet f(t)dt$

A) SUR L'INTÉGRANDE, OU LES INTÉGRALES PARTIELLES

Les intégrales partielles sont des intégrales classiques. Elles se manipulent sans précaution.

On commence par qualifier l'intégrale et identifier les impropriétés. Et on traite les impropriétés $\bullet$ une par une. **Dans l'ordre :**

- T2>** On peut reconnaître un moment d'une loi usuelle.

Exple.3 | $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$: moment d'ordre 2 de la densité $\mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$, donc intégrale convergente.

- b. **T3** On étudie l'intégrande : si l'intégrande admet une limite lorsque $t \rightarrow \bullet$, il s'agit d'une fausse impropriété : l'intégrale est classique.

Exple.4 $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$

- c. **T4** Sinon, si l'intégrande se primitive à vue, on calcule les intégrales partielles et on étudie leur limite quand $x \rightarrow \bullet$. **Donne la valeur de l'intégrale en cas d'existence.**

Exple.5 $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x = \frac{\pi}{2} + o(1)$

- d. **T5** Sinon on peut tenter une IPP sur les intégrales partielles. **Ne pas oublier de signaler que u, v sont $\mathcal{C}^1$.** On étudie la limite du terme tout intégré quand $x \rightarrow \bullet$, et la nouvelle intégrale est impropre mais normalement plus simple à étudier que celle d'origine. **Peut donner la valeur de l'intégrale en cas d'existence si on sait calculer la nouvelle intégrale.**

Exple.6 $\int_0^x te^{-t} dt = \underbrace{[-te^{-t}]_0^x}_{\text{intégrale de départ}} + \underbrace{\int_0^x e^{-t} dt}_{\text{normalement plus simple à étudier}}$

- e. **T6** Sinon, on peut tenter un changement de variables bijectif $\mathcal{C}^1$ sur les intégrales partielles et on étudie la limite en la nouvelle impropriété. **Peut donner la valeur de l'intégrale en cas d'existence si on sait calculer les intégrales partielles.**

[Changement de variables]
Thm.1

Soit φ une bijection strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]a, \beta[$ sur $]a, b[$ Alors :

- Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature.
- En cas de convergence, elles sont égales.

Exple.7

$\int_1^x \frac{dt}{t + \sqrt{t}} \stackrel{u=\sqrt{t}}{x \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2udu}{u^2 + u}$

Cette nouvelle intégrale se calcule.

- f. **T7** Sinon, si l'intégrande est positive, on peut utiliser le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives en **travaillant avec l'intégrande.**

[Théorème de comparaison]
Thm.2

Soit $I = [a, b[$ un intervalle non vide, $b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions positives continues sur I . On suppose que :

$\forall t \in I \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

Alors :
 $\int_a^b f$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g$ diverge
 $\int_a^b g$ converge $\Rightarrow \int_a^b f$ converge.

Exple.8

$\forall t \in [1, +\infty[\quad \frac{1}{t^2 + \cos^2 t} \leq \frac{1}{t^2}$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ existe par calcul explicite des intégrales partielles, on déduit par **Thm. 2** que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \cos^2 t} dt$ converge.

B) DIRECTEMENT SUR L'INTÉGRALE IMPROPRE

Attention, ces manipulations ne peuvent se faire sans écrire les précautions d'usage qu'il faut absolument citer.

- a. **Cas de l'IPP.** Après avoir trouvé deux fonctions $\mathcal{C}^1$ telles que $f = u'v$, on écrit quelque chose comme :

Exple.9

«l'intégration par parties suivante est valide dès lors qu'on aura montré que deux des trois quantités apparaissant dans l'égalité existent dans $\mathbb{R}$.»

$\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^{+\infty} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} dt}_B$.

«Par opérations sur les limites, le terme entre crochets a une limite réelle, et par primitivation à vue, le terme B est une intégrale convergente.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ est une intégrale convergente et vaut 1 ..»

- b. **Cas du changement de variables. Attention, un changement de variables ne transformera jamais une intégrale impropre en une intégrale classique.** La nouvelle intégrale impropre obtenue s'analysera avec les méthodes listées précédemment.

Exple.10

$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$. Cette intégrale est doublement impropre en 0 et 1. On nous donne le changement de variables $t = \frac{1 + \sin(u)}{2}$. Il est bien bijectif $\mathcal{C}^1$ de $[-\pi/2; \pi/2]$ sur $[0, 1]$. Comme on ne change pas la nature d'une intégrale impropre par changement de variables, ni sa valeur en cas de convergence, on trouve sous réserve d'existence :

$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2} \cos u du}{\sqrt{\frac{1}{4} (1 + \sin u) (1 - \sin u)}}$
 $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{|\cos u|} du$.

La nouvelle intégrande se prolonge par continuité aux deux extrémités. La nouvelle intégrale est ainsi faussement impropre, donc convergente, et vaut π . Donc I converge et vaut π .