Lois usuelles des variables aléatoires discrètes

Rappels Cadre

- $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est un espace variables aléatoires discrètes).
- Les variables aléatoires finies (1ère année sont un cas particulier de

Importations :

- `from random import random`

I Simulation d'une variable aléatoire discrète

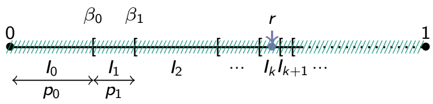
a) Principe

Soit X une VAR discrète notons $X(\Omega) = \{x_0 < x_1 < \dots, x_n < \dots\}$ son espace image et posons $p_k = P(X = x_k)$.

a. Comme la série $\sum_{k \geq 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1, on peut partitionner l'intervalle $[0, 1[$ en intervalles de I_k de longueur p_k comme sur la figure.

b. On tire un flottant r au hasard dans $[0, 1[$ (on a représenté sur le dessin un grand nombre de tirages suivant une loi $\mathscr{U}(0, 1)$).

c. *Simulation de X* : comme la proportion de flottants r tombant dans I_k sur un grand nombre de tirages (dessinés en hachures) est environ p_k, on décrète que si r tombe dans I_k, la valeur observée de X est alors x_k.



Noter que $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} p_k = F_X(x_n)$

b) Implémentation

Code Python ▼

```python
1  def simul(x,p):
2      """
3      entrées (listes de flottants)
4      x = [x0,...] : X(Omega)
5      p = [p0,...] : fonc. de masse
6      sortie : une réalisation de X
7      """
8      k=0
9      p = p[0]
10     S = p
11     r = random()
12     while r>S:
13         k+=1
14         S+=p[k]
15     return x[k]
```

Rem.1 | Commentaires sur le script

- Ligne 1 : Si la VAR X prend un nombre **fini** de valeurs, la donnée exhaustive de la fonction de masse p en variable d'entrée de `simul(x,p)` est possible (voir **Exple. 1**).
- Lignes 12-14 : Sinon, on essaie dans la boucle **`while`** de calculer les nombres `p[k]` par récurrence (voir la simulation de la loi de Poisson en III E)).

Exple.1 |
Simulation de la loi $\mathscr{B}(2, 1/3)$:

Code Python ▼

```python
t = 1/3          # param de la loi
s = 1-t
x = [0,1,2]          # esp. image
p = [t**2,2t*s,s**2] # loi de X
simul(x,p)
```

II Loi géométrique sur $\mathbf{N}^\star$

a) Définition

[Loi géométrique $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$] **Déf.1**

On dit que X suit une loi géométrique (sur $\mathbf{N}^\star$) de paramètre $p \in]0, 1[$ si :

a. $X(\Omega) \subset \mathbf{N}^\star$.

b. $\forall k \in \mathbf{N}^\star \quad P(X = k) = pq^{k-1}$ (où $q = 1 - p$).

Dans ce cas on note $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$

Rem.2 |

a. La loi géométrique est la loi du nombre d'essais effectués pour obtenir le premier succès lors de répétitions **mutuellement indépendantes** d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

b. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$, la variable $Y = X - 1$ qui compte donc le nombre d'échecs avant le premier succès. On a donc $Y(\Omega) = \mathbf{N}$ et $P(Y = k) = pq^k$.

b) Fonction de répartition

[Fonction de répartition] **Prop.1**

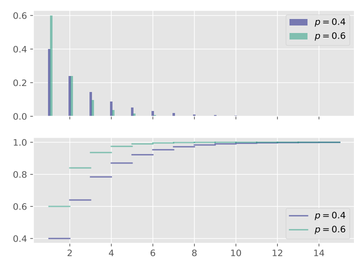
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$, pour tout réel t :

$$F_X(t) = \begin{vmatrix} 1 - q^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{vmatrix}$$

en notant $q = 1 - p$

c) Graphique

Lois $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$
Fonction de masse



Fonction de répartition

Rem.3 | On notera la ressemblance avec la loi exponentielle. Voir **Prop.3**.

d) Moments

[Moments de la loi géométrique] **Thm.1**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$ alors X admet espérance et variance et :

a. $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

b. $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

Rem.4 | En moyenne, le premier succés apparaît à un rang d'ordre $\dfrac{1}{p}$.

E) Simulation

On utilise **Rem. 2** :

Code Python ▼

```python
def geom(p):
    k = 1
    echec  =  random()>p
    while echec:
        k+=1
        echec  =  random()>p
    return k
```

F) Propriétés complémentaires

[Absence de mémoire] **Prop.2**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$ alors :
$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \forall k \in \mathbf{N}^\star$:

$$P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$$

Dit autrement, pour tout $n \geq 0$:

$$P_{X>n}(X > n+k) = P_{X>0}(X > 0+k)$$

Rem.5 | Interprération : savoir qu'on a déjà fait n essais ne donne aucune information supplémentaire sur le fait d'obtenir un succès k essais plus tard.

[Lien avec la loi exponentielle] **Prop.3**

Soit $\alpha > 0$, et (p_N) une suite de réels de $]0,1[$ telle que $p_N \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{\alpha}{N}$. Soit $(X_N)_{N\geq 1}$ une suite de VAR de loi $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p_N)$. Alors pour tout réel $t > 0$: $P\left(\frac{X_N}{N} > t\right) \underset{N\to\infty}{\sim} e^{-\alpha t}$. Autrement dit, pour N assez grand, la loi de $\frac{X_N}{N}$ est approximativement exponentielle de paramètre α.

III Loi de Poisson

A) Définition

[Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$] **Déf.2**

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

a. $X(\Omega) \subset \mathbf{N}$.

b. $\forall k \in \mathbf{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Dans ce cas on note $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Rem.6 | La loi de Poisson est appelée la loi des évènements rares puisqu'elle compte le nombre de succès lors d'un grand nombre de répétitions d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes à faible paramètre de succès (une $\mathscr{B}(n,p)$ avec p petit et n grand).

Exple.2 |

Notamment :

a. Le nombre d'accidents d'avion ayant eu lieu une année sur tous les vols peut être modélisé par une VAR de Poisson.

b. Le nombre de personnes nées le même jour dans le lycée aussi.

c. Le nombre de fautes de frappes dans un typographié aussi.

B) Fonction de répartition

[F. de rép. de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$] **Prop.4**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors pour tout réel t :

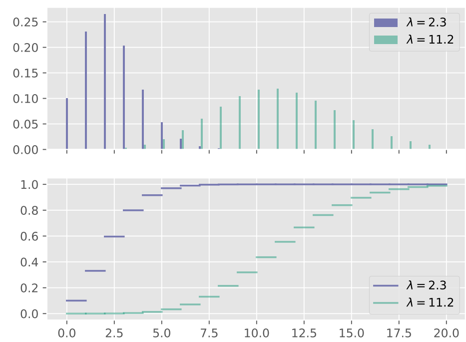
$$F_X(t) = \begin{vmatrix} e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}\frac{\lambda^k}{k!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{vmatrix}$$

Rem.7 | La fonction de répartition de la loi de Poisson n'a pas d'expression simple.

C) Graphique

Rem.8 | La fonction de masse se concentre autour des valeurs de k de qui sont de l'ordre de λ.

Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$
Fonctions de masse dans deux cas



Fonctions de répartition correpsondantes

D) Moments

[Moments de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$] **Prop.5**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors X admet espérance et variance et :

a. $E(X) = \lambda$.

b. $V(X) = \lambda$.

E) Simulation

```python
1  from random import random
2  from numpy import exp
3  def Poisson(lambada):
4      k=0
5      p = exp(-lambada)  # p_0
6      S = p              # F_X(k)
7      r = random()
8      while r>S:
9          k+=1
10         p*=lambada/k
11         S+=p           # F_X(k+1)
12     return k
```

- Ligne 3 (*cf.* **Rem.1**) : on ne peut pas donner la fonction de masse en variable d'entrée. On calcule les p_k au fur et à mesure (ligne 10).
- ligne 10 : pour cela, on utilise le fait que la fonction de masse $k \mapsto p_k$ vérifie : $p_0 = e^{-\lambda}$ (ligne 5)
  et $\forall k \in \mathbf{N}^\star \quad p_k = p_{k-1} \times \dfrac{\lambda}{k}$.

Rem.9 | D'après les théorèmes limites (Fiche Spé 13), on peut utiliser des lois approchées pour obtenir une simulation *approchée* d'une loi $\mathscr{P}(\lambda)$:

a. On simule une loi $\mathscr{B}\left(N, \dfrac{\lambda}{N}\right)$ avec N choisi grand (**Thn. 6** Fiche Spé 13) et fiche Révisions 21 IV

b. On simule une loi normale $N(\lambda, \lambda)$ si λ est grand (**Thm. 9** Fiche Spé 13) .