Variables aléatoires discrètes

Cadre Rappels Prérequis

- $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est un espace probabilisé.
- Revoir la théorie des séries numériques
- Revoir la théorie basique des probabilités
- Suite : liste de réels indexée sur $\mathbf{N}$.
- Si $I \subset \mathbf{N}$, $\{x_n\}_{n\in I}$ est une notation pour désigner l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n \dots \quad n \in I\}$

I Variable aléatoire discrète

A) Notions de base

[VAR discrète, abrégé VARD] Déf.1
Toute variable aléatoire X telle que les éléments de $X(\Omega)$ sont ceux d'une suite (finie ou infinie). On dit alors que $X(\Omega)$ est dénombrable.

Rem.1 On peut donc indexer les éléments de $X(\Omega)$ sur $\mathbf{N}$:

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad n \in I\}$$

où I est une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.

Exple.1

a. Les VAR définies sur un EPF sont des VAR discrètes (*cf.* Cours de première année.)

b. Si X est la VAR définie pour $k \in \mathbf{N}^\star$ par : $P\left(X = \frac{1}{k}\right) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, X est une VAR discrète (ici $x_n = 1/n$, et $n \in I = \mathbf{N}^\star$).

c. Les variables à densité **ne sont pas** des VAR discrètes.

[SCE associé à une VAR discrète] Thm.1
Si X est une VAR discrète et $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in I}$, [a] alors les évènements $X = x_n$ pour n décrivant I forment un SCE appelé système complet d'évènements associé à X.

a. Souvent $I = \mathbf{N}$, ou $I = \mathbf{N}^\star$ ou encore $I = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$

[Fonction de masse sur un ensemble dénombrable] Déf.2
Si $E = \{x_k\}_{k\in I}$, $I \subset \mathbf{N}$ est un ensemble dénombrable de réels, on appelle fonction de masse sur E toute fonction p :

a. définie sur E.

b. positive.

c. Telle que la série de $\sum_{k\in I} p(x_k)$ est convergente de somme 1.

Exple.2
La fonction p définie sur l'ensemble des carrés parfaits $K = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ par $p(x_n) = \frac{1}{2^n}$ où $x_n = n^2$ pour tout entier $n \geq 1$ est une fonction de masse puisque la série de t.g. 2^{-n} $(n \geq 1)$ est à termes positifs, convergente, de somme 1.

[Loi d'une VAR discrète] Déf.3
Si X est une VAR discrète d'espace image $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in I}$, la fonction définie sur $X(\Omega)$ par $p(x_k) = P(X = x_k)$ est une fonction de masse induisant une mesure de probabilité sur $X(\Omega)$ appelée loi de la variable X.

Rem.2
$\boxed{T_1>}$ On utilise ce théorème pour vérifier qu'on a une variable aléatoire.

Exple.3 *À quelle condition sur α on définit une variable aléatoire X sur $\Omega = \mathbf{N}^\star$ en posant $P(X = k) = \frac{\alpha}{k(k+1)}$ pour $k \in \mathbf{N}^\star$?* On a une VAR ssi la fonction $p : k \mapsto P(X = k)$ est une fonction de masse sur $\mathbf{N}^\star$. Or la série $\sum_{k>0} \frac{\alpha}{k(k+1)}$ est à termes positifs, donc p est une fonction de masse ssi la série converge et a pour somme 1. Or les sommes partielles valent par téléscopage : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{k(k+1)} = \alpha - \frac{\alpha}{n+1}$.
Ainsi, $S_n \underset{n\to\infty}{=} \alpha + o(1)$, donc p est une fonction de masse ssi $\alpha = 1$.

II Fonction de répartition

Les propriétés universelles des fonctions de répartition sont vérifiées À savoir : positivité, croissance, limites en $\pm\infty$.

A) Propriétés

[Propriétés des fonctions de répartition] Prop.1
Notons $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in I}$. Pour tout réel t :

a. $F_X(t) = \sum_{\substack{n\in I \\ x_n \leq t}} P(X = x_n)$.

b. En particulier, si $X(\Omega) = \mathbf{N}$:

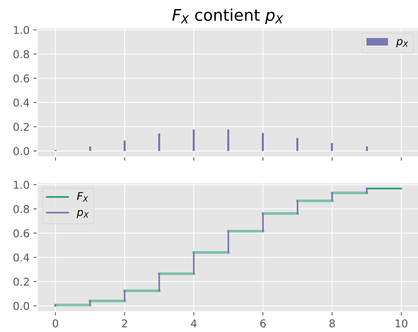
1) $F_X(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P(X = k)$.

2) Pour $k > 0$:
$P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

Rem.3 De façon générale, si on peut ordonner en une suite strictement croissante les éléments de $X(\Omega) = x_1 > x_2 > \dots > x_n$, il est vrai que $P(X = k_x) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$ en convenant que $F(x_0) = 0$

B) Obtention de la loi par la fonction de répartition

[La fonction de répartition contient la loi] Thm.2
La loi de X est déterminée par F_X. En particulier, si deux variables ont même fonction de répartition, elles ont même loi.



L'amplitude de la discontinuité de F_X au point x_k vaut $P(X = x_k)$.

Rem.4

T2> On calcule dans certains cas la fonction de répartition au lieu de la loi pour obtenir cette dernière. Cas typique : loi du maximum. Pour le min, on utilise plutôt la *fonction de survie* $S_X : t \mapsto P(X > t)$.

Exple.4

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ de paramètres respectifs p, p'. Calculer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

On calcule la fonction de survie $S_X : t \mapsto P(X > t) = 1 - F_X(t)$, car pour tout eniter n : $\min(a, b) > t \Leftrightarrow \begin{cases} a > t \\ b > t \end{cases}$.

Il suit que pour tout réel t, $[Z > t] = [X > t] \cap [Y > t]$ donc par mutuelle indépendance, et parce que $[X > t] = [X > \lfloor t \rfloor]$ (en effet, les variables X, Y ne prennent que des valeurs entières) :

$$P(Z > t) = P(X > t)P(Y > t) = q^{\lfloor t \rfloor} q'^{\lfloor t \rfloor}$$

(où $q = 1 - p, q' = 1 - p'$, et $\lfloor t \rfloor$ est la partie entière de t). Comme $q^{\lfloor t \rfloor} q'^{\lfloor t \rfloor} = (qq')^{\lfloor t \rfloor}$, on reconnait la fonction de survie d'une loi géométrique de paramètre $1 - qq'$ donc Z suit une loi géométrique de paramètre $\pi = 1 - qq' = p + p' - pp'$.

III Moments

a) Moment d'ordre r d'une variable aléatoire

[Moment d'ordre r : $M_{X,r}$] **Déf.4**

La VAR X admet un moment d'ordre r si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^r P(X = x)$ est convergente. On pose alors :

$$M_{X,r} = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x).$$

[Existence de moments] **Prop.2**

Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Si X admet un moment d'ordre r, alors tous les moments d'ordre inférieur existent aussi.

Rem.5

T3> Peut servir pour montrer d'un coup que variance et espérance n'existent pas : il suffit de prouver que le moment d'ordre 1 n'existe pas.

b) Espérance d'une variable aléatoire discrète

[Espérance] **Déf.5**

La VAR X adme une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente et par définition

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

[Propriétés de l'espérance] **Prop.3**

L'ensemble des VAR discrètes sur Ω admettant un moment d'ordre 1 est un espace vectoriel et l'espérance y est une forme linéaire positive et croissante. Précisément :

- **a.** Si X, Y sont deux VAR discrètes sur Ω admettant une espérance, alors pour tous réels λ, μ, la variable $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et :
$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$
En particulier :
$$E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu.$$
- **b.** Si X est à valeurs positives quasi-certainement, $E(X) \geq 0$.
- **c.** Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$.
- **d.** Les grandeurs X et $E(X)$ sont dans les mêmes unités.
- **e.** Si X possède une espérance, la variable notée $X - E(X)$, appelée variable centrée déduite de X, possède aussi une espérance, et celle-ci est nulle.

[Formule de transfert] **Thm.3**

Soit f une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$, et Y la VAR donée par $Y = f(X)$. Alors Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)|P(X = x)$ converge **absolument** et dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

c) Variance. Écart-type

[Existence de la variance et du moment d'ordre 2] **Prop.4**

Soit X une VARD Sont équivalents :

- **a.** X admet une variance.
- **b.** X admet un moment d'ordre 2.

[Variance - écart-type] **Déf.6**

- **a.** La variance de X est définie sous réserve d'existence par :
$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$
- **b.** L'écart-type de X, noté σ_X est défini alors par
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

[Propriétés de la variance] **Prop.5**

- **a.** (*Positivité*). $V(X) \geq 0$.
- **b.** (*Homogénéité.*) Si X est exprimée en unités u, $V(X)$ est en unité u^2, et σ_X en unités u.
- **c.** (*Homogénité et invariance par translation*). Si a, b sont deux réels, $aX + b$ admet une variance et :
$$V(ax + b) = a^2 V(X)$$
- **d.** $V(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi quasi-certaine.

[Formule de König] **Thm.4**

Soit X une VAR discrète sur un espace probabilisé . Si X admet une variance, alors X admet un moment d'ordre 2, une espérance et :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$