Diagonalisation des matrices carrées

Cadre. Noations. Prérequis.

- **Prérequis** : résolution des systèmes linéaires. Systèmes de Cramer. Rang.
- $n \geq 1$ est un entier fixé.
- $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est l'espace vectoriel dans lequel on travaille. Sa dimension est n
- Typ. Les colonnes seront notées par des lettres grasses.
- On note $\mathbf{E}_i = (0\dots0, \underset{\underset{i^{è}}{\uparrow}}{1}, 0\dots, 0)^T$ le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{C}_j = A\mathbf{E}_j$ est la j-ème colonne de A.
- Vous pouvez penser les colonnes comme les vecteurs de $\mathbf{K}^n$ qu'elles représentent canoniquement.

I Éléments propres

a) Noyau d'une matrice

[Noyau d'une matrice M] Déf.1

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le noyau de M noté $\ker M$ est **colonnes** $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ solutions du système linéaire matriciel homogène $M\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (ou sous forme réduite : $(M|\mathbf{0})$)

Rem.1 Typ. Le noyau d'une matrice est constitué de colonnes.

[Structure vectorielle] Prop.1

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\ker M$ est un s-ev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

En effet, $\ker M$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

b) Valeurs propres

[valeur propre - spectre] Déf.2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ K une matrice carrée.

a. On appelle valeur propre de A tout scalaire λ pour lequel la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

b. Le spectre de A est l'ensemble noté $\sigma(A)$ de ses valeurs propres.

Rem.2 Par définition de système de Cramer, $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement existe une solution $\mathbf{X}$ non nulle au système linéaire de forme réduite $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$

[Sous-espace propre associé] Déf.3

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ K, et $\lambda \in \sigma(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}n, 1(\mathbf{K})$ défini par : $\mathscr{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ s'appelle sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

[Structure vectorielle] Prop.2

a. $\mathscr{E}_\lambda$ est un s-ev de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ de dimension au moins 1

b. $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est dans $\mathscr{E}_\lambda$ si et seulement si $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$.

Rem.3

T1> En pratique, pour trouver les vecteurs propres d'une matrice A :

a. On calcule le spectre de A (*cf.* **Thm.1**).

b. On résout le système homogène $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$.

T2> Si on trouve une colonne $\mathbf{X}$ **non nulle** telle que $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$, alors on peut affirmer que λ est valeur propre de A, et que $\mathbf{X}$ est un vecteur propre associé.

c) Détermination du spectre

[Obtention du spectre] Thm.1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et pour tout scalaire $\lambda : A_\lambda := A - \lambda I_n$. Alors :

a. λ est une valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{rang}(A_\lambda) < n$.

b. Si $n = 2$, les valeurs propres de A sont les racines du trinôme

$$\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A_\lambda).$$

En particulier A possède au plus deux valeurs propres distinctes.

c. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

d. Soit $1 \leq j \leq n$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Si tous les coefficients de la colonne j de A (en dehors du j-ème) sont nuls alors $a_{j,j}$ est valeur propre de A et $\mathbf{E}_j$ est un vecteur propre associé (voir **Exple.1**).

Exple.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & \boxed{-2} \end{pmatrix}.$$

La lecture de la matrice indique que $A\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$ et que $A\mathbf{E}_4 = -2\mathbf{E}_4$. Donc 0 et -2 sont des valeurs propres de A et des vecteurs propres associés sont respectivement $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_4$.

[Spectre de la transposée] Cor.1

A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Exple.2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ La somme des coeffs de chaque colonne de A fait 4. Ceci se traduit par $A^T\mathbf{Y} = 4\mathbf{Y}$ où $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, 4 est vp. de A^T. Par **Cor.1**, 4 est aussi vp de A.

II Étude des sous-espaces propres

a) Propriétés immédiates

[Propriétés des sev propres $\mathscr{E}_\lambda$] Prop.3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \sigma(A)$. Alors

a. $\mathscr{E}_\lambda$ est un sev de dimension au moins 1, et si $\lambda \notin \sigma(A)$, alors $\mathscr{E}_\lambda = \{\mathbf{0}\}$.

b. $\mathbf{X} \in \mathscr{E}_\lambda \Leftrightarrow A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$ ($\mathbf{X}$: colonne !)

c. Le noyau de A est $\mathscr{E}_0$, et donc A n'est pas inversible si et seulement si $0 \in \sigma(A)$.

d. Les sev propres sont stables par A, c-à-d : $\mathbf{X} \in \mathscr{E}_\lambda \Rightarrow A\mathbf{X} \in \mathscr{E}_\lambda$.

e. $\dim \mathscr{E}_\lambda$ vaut le nombre de variables libres du système linéaire homogène de forme réduite $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$

B) Valeurs propres et indépendance linéaire

[Intersection des sous-espaces propres] **Cor.2**
Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes n'ont que le vecteur nul comme vecteur en commun.

[Sert dans tous les exercices] **Cor.3**
En juxtaposant des bases (ou simplement des familles libres) de sous-espaces propres deux à deux distincts d'une matrice, on obtient encore une famille de colonnes libre.

[Somme des dimensions] **Cor.4**
La somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice $n \times n$ ne peut dépasser n.

Rem.4 en effet, les bases d'un sev sont les familles libres de ce sev de plus grand cardinal.

[Nombre maximal de vp distinctes] **Cor.5**
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.

III Diagonalisation en dimension finie

A) Définition

[Diagonalisabilité] **Déf.4**
$A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si il existe une matrice diagonale semblable à A *i.e.* : $\exists P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ inversible t.q $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exple.3

a. Une matrice diagonale D est diagonalisable, puisque $D = I_n^{-1} D I_n$.

b. Une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $S = \alpha I_n$ (colinéaire à I_n) est diagonale. De plus $P^{-1}SP = S$ pour toute matrice inversible P. En particulier une matrice ne possédant qu'une seule valeur propre est diagonalisable si et seulement si elle est scalaire.

B) Critères de diagonalisabilité

*[Condition nécessaire **et** suffisante de la diagonalisabilité]* **Thm.2**
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Sont équivalents :

a. A est diagonalisbale.

b. La somme des dimensions des sev propres de A au moins n.

[Condition suffisante de diagonalisabilité] **Cor.6**
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ admet exactement n valeurs propres distinctes alors :

a. A est diagonalisable.

b. Les sous-espaces propres de f (resp. A) sont de dimension 1.

Rem.5
T3> Dans tous les cas, on obtient une matrice P inversible diagonalisant A en juxtaposant des bases de chaque s-ev propre de A.

[Théorème spectral] **Thm.3**
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique **réelle** (c-à-d $A^T = A$) alors :

a. A est diagonalisable.

b. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Rem.6

a. T4> En juxtaposant des bases **orthonormées de chaque sous-espace propre**, on obtient une matrice $P_\star$ diagonalisant A. La matrice $P_\star$ vérifie donc **dans ce cas particulier** :

$$\begin{cases} P_\star^{-1} = P_\star^T \\ P_\star^{-1}AP_\star \text{ est diagonale} \end{cases}$$

b. ☠ Attention, même si A est symétrique, la matrice P obtenue par juxtaposition de bases de chaque sous-espace propre **ne vérifie pas** $P^{-1} = P^T$. Pour cela, **il faut s'assurer** que l'on a choisi **dans chaque sous-espace propre** des bases **orthonormées**.

IV Applications

A) Méthode et exemples

T5> De façon générale, si on cherche à établir un résultat relatif à une matrice A donnée :

a. On commence par diagonaliser A en une matrice D à travers une matrice P contenant une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ de vecteurs propres.

b. On établit d'abord le résultat pour la matrice D.

c. On déduit ensuite le résultat pour le problème initial en y revenant grâce à la relation $A = PDP^{-1}$

Exple.4
T6> *À savoir faire.* Calcul de A^m où $m \in \mathbf{N}$.

a. On commence par diagonaliser A (si possible) à travers P de sorte que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

b. On calcule d'abord D^m (ce qui est facile).

c. On montre par récurrence que $D^m = P^{-1}A^mP$.

d. On revient au problème initial par : $A^m = PD^mP^{-1}$.

Exple.5 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ K. Si on cherche les matrices carrées M telles que $AM = MA$:

a. On cherche (si possible) une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

b. On résout à la main $ND = DN$ (inconnue : N).

c. On revient au problème initial en sandwichant par P, P^{-1} convenablement :

$$\begin{aligned} DN = ND \quad & \Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \\ & \Leftrightarrow \quad AM = MA \quad \text{où } M = PNP^{-1}. \end{aligned}$$

Les solutions du problème initial sont donc les matrices PNP^{-1} où N sont les solutions du problème **b.**

Exple.6
Même principe pour un système différentiel :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} \quad \mathbf{X}(t) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

a. On diagonalise A qui est alors semblable à D qui est une matrice diagonale.

b. On résout d'abord $\mathbf{Y}' = D\mathbf{Y}$ (inconnue : $\mathbf{Y}$).

c. On revient au problème initial en sandwichant par P, P^{-1} convenablement : la dernière équation équivaut à $P\mathbf{Y}' = PDP^{-1}P\mathbf{Y}$, et après avoir vérifié que $P\mathbf{Y}' = (P\mathbf{Y})'$, les solutions sont les $X = P\mathbf{Y}$, où $\mathbf{Y}$ sont les solutions du problème **b.**.