Séries numériques

Rappels

- **Série** : ni un réel ni une suite.
- **Somme d'une série** : un réel qui n'existe pas toujours.
- **Sommes partielle** : terme général d'une suite.
- **On ne manipule jamais une série** dans un calcul.
- Relations utiles : $\frac{n}{n!} \underset{n\geq 1}{=} \frac{1}{(n-1)!}$, $\frac{n^2}{n!} \underset{n\geq 2}{=} \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$.

I Généralités

A) Définitions

[Série numérique] **Déf.1**

Notée $\sum_{n\geq n_0} u_k$. C'est une écriture résumée pour donner :

a. Le terme général de la série : u_k (c'est le t.g. de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$).

b. La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$, où $S_n = u_{n_0} + \cdots + u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Rem.1 | En général, $n_0 = 0, 1$ ou 2.

[Convergence - somme d'une série] **Déf.2**

Une série est dite convergente ssi la suite des sommes partielles converge dans $\mathbf{R}$. La limite ℓ de cette suite s'appelle la **somme** de la série et se note $\ell = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$

Rem.2 |

T1> En étudiant la suite des sommes partielles, à l'aide des techniques de calcul (sommes telescopiques notamment), ou théorèmes sur les suites (inégalités), on peut parfois établir la nature d'une série et calculer sa somme en cas de convergence.

Exple.1 | la série de t.g. $\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge car pour $k \geq 1$:

$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

En sommant de $k = 1$ à $k = n$ (n fixé), on a par telescopage :

$$\sqrt{n+1} - 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

ce qui montre que les sommes partielles tendent vers $+\infty$. *Noter qu'on a manipulé les sommes partielles, jamais la série.*

B) Structure

[Troncature] **Prop.1**

Soit p un entier fixé. Les séries de t.g. u_k et u_{k+p} sont de même nature.

Rem.3 | Permet de considérer le terme général d'une série à partir d'un certain rang, ce qui simplifie l'étude de la nature.

Exple.2 | Les séries $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k!}$ et $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(k-2)!}$ sont de même nature.

[structure vectorielle] **Prop.2**

a. L'ensemble $\mathscr{S}$ des séries numériques est un $\mathbf{R}$−espace vectoriel.

b. L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des séries convergentes en est un sous-espace vectoriel.

c. La somme définit sur $\mathscr{S}_0$ une forme linéaire, puisque si $\sum_{n\geq n_0} u_k$ et $\sum_{n\geq n_0} v_k$ sont dans $\mathscr{S}_0$, alors :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty}(au_k+bv_k) = a\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + b\sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$$

Rem.4 |

T2> On se sert souvent de ce dernier point dans les exercices.

Exple.3 | Pour $n \geq 2$:

$\frac{n^2}{n!} = \frac{n(n-1)+n}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

donc la série de t.g $\frac{n^2}{n!}$ est convergente comme combinaison linéaire de séries exponentielles tronquées (**Thm. 3**) donc convergentes (**Prop.1**). *Noter qu'on a manipulé le terme général, jamais la série.*

II Étude de la convergence

A) Condition nécessaire

[Condition nécessaire] **Prop.3**

Pour qu'une série soit convergente, **il faut** que son terme général converge vers 0. La réciproque est fausse (ça ne suffit pas !).

Exple.4 | Le t.g. de la série harmonique converge vers 0, mais la série harmonique diverge (**Thm. 3**)

B) Séries de références

Servent tout le temps dans les exercices

[Séries géométriques] **Thm.1**

a. La série géométrique $\sum_{k\geq 0} q^k$ converge **si et seulement si** $|q|<1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Il en est de même pour la série de t.g. q^{k+1}, (ou q^{k+2} *etc*).

b. Les séries géométriques dérivées $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

[Série exponentielle] **Thm.2**

Pour tout réel x la série de terme général $u_k = \frac{x^k}{k!}$ converge et :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

[Séries zêta] **Thm.3**

a. La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. Il en est de même pour la série de t.g. $\frac{1}{n+1}$ (**Prop.1**).

b. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Il en est de même pour la série de t.g. $\frac{1}{(n+1)^2}$ (**Prop.1**).

c) Condition suffisante de convergence

[Absolue convergence] **Déf.3**

La série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{k\geq n_0}|u_k|$ est convergente.

[Cond. suffisante de CV] **Thm.4**

Si une série converge absolument, alors elle converge.

III Séries à termes positifs

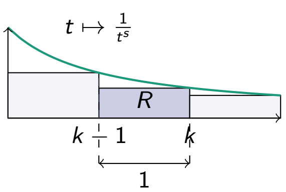
a) Convergence monotone

[Cv monot.] **Thm.5**

Si la série $\sum_k u_k$ est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Exple.5

Convergence de $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}$ *pour* $s>1$.



Par décroissance sur $\mathbf{R}_+^\star$ de $t\mapsto\frac{1}{t^s}$:

$\forall k\geq 2\quad\forall t\in[k-1,k]\quad 0\leq\frac{1}{k^s}\leq\frac{1}{t^s}$

puis par croissance de l'intégrale :

$0\leq\underbrace{\frac{1}{k^s}}_{\text{Aire du rectangle } R}\leq\int_{k-1}^k\frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ et enfin par sommation de $k=2$ à $k=n$ et par la relation de Chasles :

$\forall n\geq 2\quad 0\leq\sum_{k=2}^n\frac{1}{k^s}\leq\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t^s}$. D'où par primitivation :

$\forall n\geq 2\quad 0\leq\sum_{k=2}^n\frac{1}{k^s}\leq\frac{1}{s-1}-\frac{1}{n^{s-1}}\leq\frac{1}{s-1}$

Les sommes partielles sont majorées par $1/(s-1)$. Comme la série est à termes positifs, elle converge.

b) Théorème de comparaison

[CCSATP] **Thm.6**

Si à partir d'un certain rang p (souvent $p=1,2$) : $0\leq u_k\leq v_k$ alors :

a. si la série $\sum_k v_k$ converge, la série $\sum_k u_k$ aussi.

b. si la série $\sum_k u_k$ diverge, la série $\sum_k v_k$ aussi

Rem.5

a. Souvent utilisé avec les séries de référence.

b. ☠ On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux, pas les séries, ni les sommes partielles.**

Exple.6

La série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k+3)(k+2)}$ converge puisque pour tout entier $k\geq 0$:

$0\leq\frac{1}{(k+3)(k+2)}\leq\frac{1}{(k+3)^2}$. La série $\sum\frac{1}{(k+3)^2}$ converge puisque c'est la série tronquée de $\sum 1/k^2$ qui est convergente (**Thm.3** et **Prop.1**).

Exple.7

La série $\sum_{k\geq 0}\frac{k}{(k+3)(k+2)}$ diverge, puisque, pour mettons $k\geq 2$, on a : $k+2\leq k+k$. Ainsi en divisant :

$0\leq\frac{k+2}{(k+3)(k+2)}\leq\frac{k+k}{(k+3)(k+2)}$.

D'où : $0\leq\frac{1}{k+3}\leq\frac{2k}{(k+3)(k+2)}$.

Comme la série harmonique diverge, la série tronquée aussi, et par comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{k\geq 2}\frac{2k}{(k+3)(k+2)}$ diverge, et la série initiale aussi.

c) Équivalents

[équivalents] **Prop.4**

Deux séries à *termes positifs* de termes généraux équivalents sont de même nature.

Exple.8 La série de terme général $u_k=\frac{k^2}{2^k}$ converge, car elle est à termes positifs, et par produits d'équivalents :

$$u_k\underset{k\to\infty}{\sim}\frac{k(k-1)}{2^k}.$$

Donc, à un facteur $1/4$ près, u_k est équivalent au terme général d'une série géométrique dérivée seconde de raison $q=1/2\in]-1,1[$, donc convergente.

IV Calculs de sommes de séries

a. Calcul explicite des sommes partielles si ce sont des sommes usuelles.

Exple.9

$\sum_{n\geq 1}u_n$, où $u_n=\left(\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n}\right)$.

$u_n=v_{n+1}-v_n$ où $v_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$.

b. Reconnaître un moment d'une VAR discrète.

Exple.10 $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}$. Utiliser la variance d'une loi de Poisson de paramètre 1 et la formule de Koenig.

c. Se ramener à des séries géométriques ou exponentielles en faisant apparaître des séries dérivées.

Exple.11

(*Séries géométriques*) Soit $x\in]-1,1[$.

$$(n^2+n)x^{2n}\overset{q=x^2}{=}n(n-1)q^n+2nq^n=q^2\underbrace{n(n-1)q^{n-2}}_{\text{connu}}+2q\underbrace{nq^{n-1}}_{\text{connu}}$$