Espaces vectoriels généraux

Rappels

- Re.v.oir tous les résultats et méthodes relatifs à $\mathbf{K}^p$.
- Les bases sont des familles de vecteur, à ce titre l'**ordre compte** dans l'écriture.
- Quand on dit $\mathbf{K}$-espace vectoriel, cela veut dire que les coefficients des combinaisons linéaires ne peuvent être pris que dans $\mathbf{K}$.
- Typ. : Les vecteurs seront notés avec des lettres grasses pour les distinguer des scalaires.

I Espaces à connaître

- **Espaces numériques.** $\mathbf{K}^p$ (qui n'a pas de base si $p = 0$).
- **Polynômes.** $\mathbf{K}_n[X]$ est de dimension finie, $\dim \mathbf{K}_n[X] = n+1$. Une base en est la base canonique $\mathscr{B}_c$ **dans cet ordre** :
$$\mathscr{B}_c = (\mathbf{1}, X, X^2, \dots, X^n)$$
- $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie de base $\mathscr{B} = (\mathbf{1}, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$.
- **Matrices :** $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension finie np. Il admet une base canonique notée $\mathscr{B}_c$ qui est par exemple pour $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ **dans cet ordre** :
$$\mathscr{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$
- **Fonctions :** L'ensemble $\mathscr{F}(I, \mathbf{K})$ (noté aussi $\mathbf{K}^I$) des fonctions définies sur un intervalle I, et à valeurs dans $\mathbf{K}$, est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. On n'en connaît pas de base.
- Soit a, b deux réels fixés. L'ensemble des solutions sur un intervalle I de l'EDL$_2$ homogène :
$$y'' + ay' + by = \mathbf{0}$$
est un espace vectoriel de dimension 2 (on résout et on met sous forme de Vect pour voir que c'est un e.v.).
- **Suites :** Soit a, b deux réels et $p \in \mathbf{N}$ fixés. L'ensemble des suites (u_n) vérifiant :
$$\forall n \geq p \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$
est un espace vectoriel de dimension 2 (on résout et on met sous forme de Vect pour voir que c'est un e.v.).

II Sous-espace vectoriel

[Sous-espace vectoriel de E] **Déf.1**

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit F un ensemble, F est un s-e.v. de E si :

a. $F \subset E$.

b. $\mathbf{0} \in F$.

c. $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \in F$.

Rem.1

T$_1$>

a. On utilise la définition pour montrer qu'un ensemble F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel en prouvant qu'il est un s-e.v. d'un e.v. bien connu (ceux du I)

b. Toutefois, on revient à cette définition quand on n'arrive pas de façon (quasi)-immédiate à mettre F sous forme de Vect (*cf.* **Rem.3 b.**).

Exple.1 On montre par la définition que l'ensemble Z des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 0$ est un s-e.v. de $\mathbf{R}[X]$.

Rem.2

Dans tout e.v. E, les ensembles E et $\{\mathbf{0}\}$ sont des s-e.v. de E appelés sous-espaces triviaux de E.

[Stabilité de la notion par intersection] **Thm.1**

L'intersection de s-e.v. d'un e.v. E est encore un s-e.v. de E. C'est en général faux pour la réunion.

III s-e.v. engendré. Vect

[Combinaison linéaire] **Déf.2**

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $p \geq 1$ un entier, et $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1} \dots \mathbf{u_p})$ une famille de p vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{F}$ tout vecteur de la forme :
$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{u_1} + \lambda_2 \mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_p \mathbf{u_p} \quad (CL)$$
où $\quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \lambda_i \in \mathbf{K}$.

[Coeffs. d'une CL] **Déf.3**

Dans (CL), les scalaires λ_i s'appellent les **coefficients** de la combinaison linéaire.

[CL triviale, nulle] **Déf.4**

La combinaison linéaire (CL) est dite **triviale** si tous ses coefficients sont nuls. La combinaison linéaire est dite **nulle** si $\mathbf{S} = \mathbf{0}$.

[s-e.v. engendré par une famille finie de vecteurs] **Thm.2**

Si $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p})$ est une famille de p vecteurs d'un e.v. E, alors l'ensemble de tous les vecteurs de la forme (CL) quand les λ_i varient dans $\mathbf{K}$ constitue un s-e.v. de E, appelé s-e.v. engendré par $\mathscr{F}$ et se note $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

Rem.3

T$_2$>

a. On retiente que **tout Vect est un s-e.v.**.

b. Dès qu'un sous-ensemble F d'un e.v. connu E est défini **paramétriquement**, en essayant de séparer les paramètres, on met en évidence la structure de Vect de F ce qui prouve que c'est un s-e.v. de E.

[plus petit s-e.v.] **Prop.1**

Tout s-e.v. contenant $\mathscr{F}$ contient $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

Rem.4

T$_3$> Très utile pour montrer qu'un Vect est contenu dans un s-e.v. donné.

Exple.2 Soit Z le s-e.v. de $\mathbf{R}[X]$ de **Exple 1.** Si $F = \mathrm{Vect}(X^2, (1-X)X^2)$, on montre que $F \subset Z$ en remarquant que : $\mathbf{A} = X^2$ et $\mathbf{B} = (1-X)X^2$ admettent, au vu de leur forme factorisée, 0 comme racine double. Ainsi ils vérifient $P(0) = P'(0) = 0$. Ils sont donc dans Z. Or Z est un s-e.v., il contient donc toutes les CL de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, c'est-à-dire F.

[Règles de calcul avec Vect] **Prop.2**

a. $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_2}, \mathbf{u_1})$.

b. $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}, \mathbf{0}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$.

c. Si les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont non nuls : $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}) = \mathrm{Vect}(\alpha_1 \mathbf{u_1}, \alpha_2 \mathbf{u_2}, \dots, \alpha_p \mathbf{u_p})$.

d. Si $\mathbf{x}$ est combinaison linéaire de $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$, alors : $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}, \mathbf{x}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$

e. $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cap \mathrm{Vect}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \neq \mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$.

IV Familles génératrices

[Famille génératrice d'un s-e.v.] **Déf.5**

Soit $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p})$ une famille de $p \geq 1$ vecteurs d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On dit que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F si $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

V Familles libres

[Famille finie libre] **Déf.6**

Une famille finie de p vecteurs $(\mathbf{u_1}, \dots \mathbf{u_p})$ d'un e.v. E est **libre** si la seule CL nulle de ses vecteurs ne s'obtient que par la CL triviale, c-à-d : $\forall \lambda_1 \in \mathbf{K}, \dots, \forall \lambda_p \in \mathbf{K}$

$$\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{u_j} = \mathbf{0}\right]}_{\text{CL nulle}} \Rightarrow \underbrace{[\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0]}_{\text{CL triviale}}$$

[Famille liée] **Déf.7**

Une famille non libre est dite **liée**.

[Propriétés des familles libres] **Prop.3**

Soit $\mathscr{F}$ une famille **libre** de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

- **a.** Toute sous-famille de $\mathscr{F}$ est libre.
- **b.** Tout élément de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, et ce, de façon **unique**.

[Familles de polynômes (utile)] **Thm.3**

Les familles de polynômes à degré deux à deux distincts sont libres.

[Liberté des petites familles] **Prop.4**

- **a.** Toute famille contenant $\mathbf{0}$ est liée.
- **b.** Une famille d'*un seul* vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- **c.** *Deux* vecteurs donnés sont liés si et seulement si ils sont proportionnels (c-à-d l'un est multiple de l'autre), ou colinéaires.
- **d.** Une famille de *trois* vecteurs 2 à 2 non colinéaires n'est pas forcément libre.

Rem.5

T_4> Pour prouver qu'une famille $\mathscr{F}$ est libre :

- **a.** On part de la définition et on exploite l'égalité vectorielle suivant la nature des vecteurs (une fonction est nulle si on part d'une CL de fonctions, ou une suite est nulle si on part d'une CL de suites,...). On peut ensuite recourir à des arguments en liens avec la nature des vecteurs (valeurs en certains points, limites, parité, régularité, degré, croissances comparées des termes de la CL *etc.*)
- **b.** En dimension finie, si on dispose d'une base, on peut travailler en coordonnées et prouver que le rang de la matrice de $\mathscr{F}$ (**Déf.12**) est de rang p.

Exple.3

- **a.** Les fonctions $\mathbf{c} = \cos$ et $\mathbf{s} = \sin$ sont libres (argument de parité).
- **b.** Les fonctions $\mathbf{u} : x \mapsto |x-1|$ et $\mathbf{v} : x \mapsto x^2$ aussi par régularité.
- **c.** Les fonctions $\mathbf{u} = \ln, \mathbf{v} = \exp, \mathbf{w} = X^2$ sont libres par argument de croissance à l'infini.

VI Bases

[Base de E ou d'un s-e.v. de E] **Déf.8**

Une base d'un s-e.v. F d'un e.v. E est une famille à la fois génératrice de F et libre.

[Familles génératrices et bases] **Prop.5**

Toute famille génératrice d'un s-e.v. contient une base de ce s-e.v..

[Propriétés des bases] **Prop.6**

Si $\mathscr{B}$ est une base d'un s-e.v. F d'un e.v. E, alors tout vecteur $\mathbf{x}$ de F est CL des éléments de $\mathscr{B}$ par un unique jeu de coefficients.

Rem.6 C'est cette propriété qui permet de parler des coordonnés d'un vecteur d'un s-e.v. F sur une base de ce s-e.v. (**Déf. 11**).

VII Dimension. Dimension finie. Rang

[Dimension finie] **Déf.9**

Un espace est dit de dimension finie si il est réduit à $\{\mathbf{0}\}$ ou si il admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs. Sinon il est dit de dimension infinie.

[de la dimension] **Thm.4**

Dans un e.v. E de dimension finie non réduit à $\{\mathbf{0}\}$, toutes les bases possèdent un nombre commun (et donc fini) de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de E. En outre $\{\mathbf{0}\}$ n'admet pas de base !

[Inclusion et dimension] **Thm.5**

- **a.** Tout s-e.v. d'un e.v. de dimension finie est de dimension finie.
- **b.** Si $F \subset G$ et F, G sont de dimension finie, alors $\dim F \leq \dim G$.
- **c.** Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

[Rang d'une famille finie de vecteurs] **Déf.10**

C'est la dimension du Vect qu'ils engendrent. Elle ne peut excéder le cardinal de la famille.

[Bases d'un s-e.v. de dimension connue] **Thm.6**

Si F est un s-e.v. de dimension $d > 0$ et si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de F, alors sont équivalents :

- **a.** $\mathscr{F}$ est une base de F (libre et génératrice de F).
- **b.** $\mathscr{F}$ est génératrice de F et possède d vecteurs.
- **c.** $\mathscr{F}$ est libre et possède d vecteurs.

VIII Coordonnées. Calcul matriciel

[Matrice/coordonnées d'un vecteur] **Déf.11**

Si $\mathbf{x}$ est un vecteur d'un s-e.v. F d'un e.v. E, et si $\mathscr{B}_F = (\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_d})$ est une base de F, la matrice [des coordonnées] de $\mathbf{x}$ sur la base $\mathscr{B}_F$ est la **colonne** X définie de façon unique (**Prop.6**) par la relation :

$$F \ni \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e_1} + \dots \lambda_d \mathbf{e_d} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}$$

[Matrice d'un système de vecteurs] **Déf.12**

La matrice d'une famille $\mathscr{F}$ de p vecteurs $(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_p})$ d'un s-e.v. F sur une base $\mathscr{B}_F$ de ce s-e.v. est la matrice A à p colonnes dont la j-ème colonne est $\underbrace{\text{la matrice de } \mathbf{x_j}}_{\text{Déf. 11.}}$.

[Calcul en coordonnées] **Thm.7**

Avec les notations de **Déf.12** : la famille $\mathscr{F}$ est libre ssi A est de rang p, génératrice de F ssi A est de rang $\dim F$, une base de F ssi A est inversible (dans ce dernier cas, A s'appelle **matrice de passage** de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{F}$).

Rem.7 Cette approche matricielle permet d'utiliser les méthodes vues en première année.

[Première Formule du changement de base] **Thm.8**

Si E est un e.v. de base $\mathscr{B}$, si $\mathscr{B}'$ en est une autre base, et si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ alors pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E, les coordonnées X de $\mathbf{x}$ sur $\mathscr{B}$ sont reliées à ses coordonnées X' sur $\mathscr{B}'$ par : $X = PX'$.