# Lois usuelles des VAR sur un EPF

**Rappels**

- $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini.
- La variable est notée $X$.
- Si $p \in [0,1]$ on pose $q = 1 - p$.

## I Loi certaine $\mathscr{C}(\lambda)$

**Description.** C'est la loi du : pas d'aléa.

**Paramètre.** $\lambda$ : réel.

**Espace image.** $X(\Omega) = \{\lambda\}$

**Loi.**

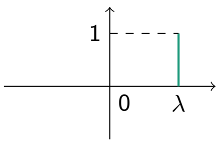
| $x =$ | $\lambda$ |
|---|---|
| $P(X = x)$ | 1 |

**Espérance.** $E(X) = \lambda$.

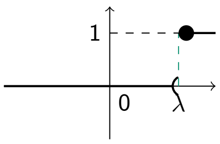
**Variance.** $V(X) = 0$.

**Exemple.** Une urne contient $N$ boules blanches. On tire $\lambda$ boules simultanément, et $X$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues.

**Peigne.**



**Fonction de répartition**



## II Loi uniforme $\mathscr{U}(n)$

**Description.** C'est la loi du pur hasard.

**Paramètre.** $n$ : entier strictement positif.

**Espace image.** $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.
Attention : 0 n'est pas dans $X(\Omega)$.
La VAR qui prend équiprobablement les valeurs de $\{0 \dots n\}$ ne suit pas la loi appelée $\mathscr{U}(n)$.

**Loi.**

| $k=$ | 1 | 2 | … | n |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | … | $\frac{1}{n}$ |

**Espérance.** $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

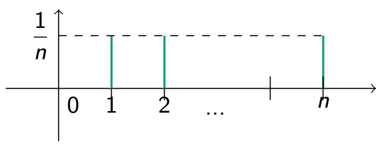
**Variance.** $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$ (pas à connaître).

**Exemple.** Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire une boule au hasard et on note $X$ la VAR égale au numéro de la boule tirée.

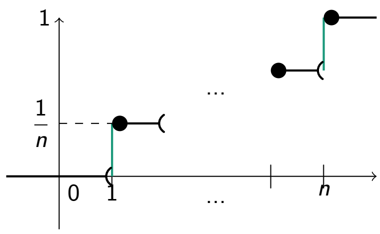
**Simulation.** Code Python ▼

```python
from random import randint
n = 10 # loi U(10)
randint(1,10)
```

**Peigne.**



**Fonction de répartition.**



## III Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$

**Description.** C'est la loi du ça passe ou ça casse.

**Paramètre.** $p \in ]0,1[$.

**Espace image.** $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
Conventionnellement, 0 code l'issue «échec» et 1 code l'issue «succès». L'expérience décrite par $X$ est celle d'une épreuve à deux issues (ca passe ou ça casse).

**Loi.**

| $k =$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

**Espérance.** $E(X) = p$.

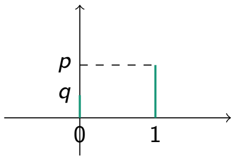
**Variance.** $V(X) = pq$.

**Exemple.** Une urne contient $n$ boules, dont une proportion $p$ est blanche. On tire une boule au hasard, et $X$ est la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est blanche, et 0 sinon.

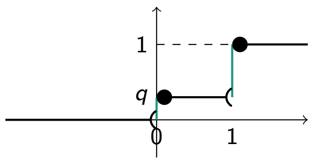
**Simulation.** Code Python ▼

```python
import random as rd
p = 0.3 # Loi  B(p)
int(rd.random()<p)
```

**Peigne.**



**Fonction de répartition**



## IV Loi bimomiale $\mathscr{B}(n, p)$

**Description.** Loi du nombre de succés lors de la répétition de $N$ épreuves de Bernoulli de même paramètre et **mutuellement indépendantes.**

**Paramètres.** $N > 0$ : entier, $p \in ]0,1[$.

**Espace image.** $X(\Omega) = \{0, \dots n\}$.
Attention, 0 est dans l'espace image.

**Loi.** $\forall k \in \{0 \dots n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

**Remarque.** La loi est particulièrement facile à calculer dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$ puisqu'elle s'obtient en divisant les coefficients binomiaux par $2^n$. Ci-dessous, la loi $\mathscr{B}\left(5, \frac{1}{2}\right)$ :

| $k=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)=$ | $\frac{1}{2^5}$ | $\frac{5}{2^5}$ | $\frac{10}{2^5}$ | $\frac{10}{2^5}$ | $\frac{5}{2^5}$ | $\frac{1}{2^5}$ |

**Espérance.** $E(X)=np$.

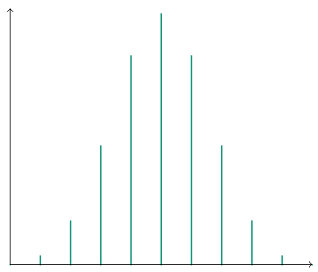
**Variance.** $V(X)=E(X)q=npq$.

**Exemple.** Une urne contient $N$ boules dont une proportion $p$ de boules est blanche. On effectue $n$ tirages successifs avec remise et $X$ compte le nombre de boules blanches obtenues dans la série.

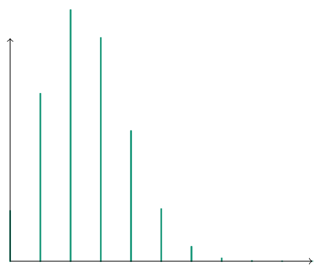
**Simulation.** Code Python ▼

```python
import random as rd
n,p  = 10,0.3  # loi B(n,p)
# n ép. de Bernoulli indép :
B  = [rd.random()<p for j in
      range(n)]
# On compte les succès :
Nsuc =len([ b for b in B if
      B==1])
```

**Peigne.**



**Loi** $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$



**Loi** $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$

## V Loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N, M, n)$ ou $\mathscr{H}(N, n, p)$

**Description.** Loi du nombre de succés dans un tirage simultané.

**Paramètres.** $N, M, n$ : entiers strictement positifs.

**Interprétation.**
— $N$ : effectif total de la population.
— $M$ : effectif de la population ayant le caractère étudié.
— $n$ : taille de l'échantillon prélevé.

**Espace image.** $X(\Omega) \subset \{0, \dots, N\}$

**Remarque.**

**a.** On trouve parfois un autre jeu de paramètres pour décrire la loi hypergéométrique, à savoir $N, n, p$, où $p=\dfrac{M}{N} \in [0,1]$. Dans tous les cas, il vaut mieux signaler explicitement ce que représentent vos paramètres.

**b.** L'inclusion $X(\Omega) \subset \{0 \dots n\}$ suffit (éventuellement certaines probablités sont nulles, si p.ex $M < n$).

**Loi.** Avec la convention que $\binom{r}{k}=0$ si $k \notin \{0 \dots r\}$ :

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{p=\frac{M}{N}}{=} \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

**Espérance.** $E(X)=n \times \dfrac{M}{N}=np$

**Exemple.** Une urne contient $N$ boules dont une proportion $p$ de boules est blanche. On effectue un prélèvement d'un échantillon de $n$ boules et $X$ compte le nombre de boules blanches obtenues dans la poignée.

**Conséquence.** **a.** La relation combinatoire

$$k!\binom{r}{k} = \underbrace{r(r-1) \times \cdots \times (r-k+1)}_{k\text{facteurs}}$$

montre que dans ce contexte, on peut simuler un tirage successif sans remise sans modifier les probablités.

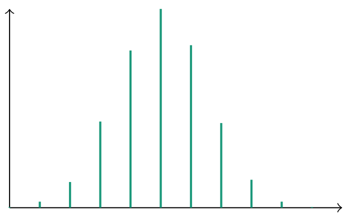
**b.** Dit autrement, la loi hypergéométrique est aussi la loi du nombre de succès lors tirages successifs sans remise.

**Simulation.** On peut s'appuyer sur le constat précédent pour simuler la loi hypergéométique. Prenons une urne de 100 boules dont 30 sont blanches. On en prélève 10.

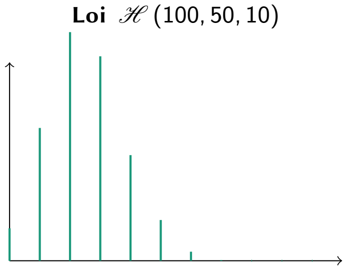
Code Python ▼

```python
from random import randint
N,n,M = 100,30,10
nsuc = 0
for  k in range(n):
    r = (randint(1,N)<=n)
    nsuc+=r
    n-=r
    N-=1 # une boule de
         moins
```

**Peigne.**



**Loi** $\mathscr{H}(100, 50, 10)$



**Loi** $\mathscr{H}(100, 25, 10)$

On notera la troublante ressemblance avec les peignes de la loi binomiale qui est loin d'être fortuite : la convergence en loi vers la loi binomiale est connue depuis la première année et sera revue dans les théorèmes asymptotiques.