Variables à densité

Rappels

- $(\Omega, \mathscr{T}, P)$: espace probabilisé.
- $\mathscr{T}$: tribu des évènements.
- Revoir les propriétés universelles des fonctions de répartition.

I Généralités

a) Densité

[Densité ou fonction de masse] **Déf.1**
La fonction f est une densité de probabilité si

a. f est définie sur $\mathbf{R}$.

b. f est continue sauf au plus en un nombre fini de points.

c. f est positive sur I.

d. l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ existe et vaut 1.

Rem.1 Inutile de prouver la convergence de cette intégrale impropre, elle converge car f_x est une densité (on applique alors Chasles).

b) VAR à densité

[Variable aléatoire à densité] **Déf.2**
Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

a. On dit que X admet la fonction f comme densité si :

1) La fonction f est une fonction de masse.

2) Pour tout réel x :
$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

b. On dit que X est à densité, ou qu'elle admet une densité, si il existe une fonction f telle que X admette f comme densité. Dans ce cas, la densité est notée f_X.

[Quasi-unicité de la densité] **Prop.1**
Une densité de probabilité d'une variable à densité est définie modulo un ensemble fini. En particulier, une densité n'est jamais unique.

c) Fonction de répartition

[Fonction de répartition] **Déf.3**
Si X est à densité de densité f_X, sa fonction de répartition est définie par $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$.

[Loi] **Cor.1**
La loi d'une VAR à densité est déterminée par sa fonction de répartition.

Exple.1 Si la fonction de répartition de la variable Y est donnée par $F_Y(y) = 0$ pour $y \leq 0$, $F_Y(y) = 1$ pour $y \geq 0$, et $F_y(y) = y$ si $y \in [0, 1]$, alors Y suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

[Loi d'une variable à densité] **Déf.4**

a. Si X est à densité, on appelle loi de X toute densité de X.

b. Deux variables aléatoires ont même loi si elles admettent une densité en commun.

d) Règles de calcul

[Calcul] **Thm.1**
Soit X une VAR à densité de densité f_X.

a. Pour tout réel a, $P(X = a) = 0$.

b. Si $a < b$ sont deux réels les probabilités des évènements $X \in [a, b]$, $X \in [a, b[$, $X \in]a, b]$ et $X \in]a, b[$ sont toutes égales et valent $\displaystyle\int_a^b f_x(t)\mathrm{d}t = F_X(b) - F_X(a)$.

c. Pour tout réel t :
$$P(X \geq t) = P(X > t) = 1 - F_X(t)$$

e) Théorème le plus important

[Caractérisation des variables à densité] **Thm.2**
Soit X une VAR sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et F_X sa fonction de répartition.

- **Si :**

a. F_X est $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$.

b. Il existe un ensemble fini Δ tel que F_X est $\mathscr{C}^1(\mathbf{R})$ sauf peut-être sur Δ,

- **alors :**

a. X est à densité.

b. De plus, une densité f_X de X est donnée par :

$$f_X(t) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \forall t \in \Delta \\ F_X'(t) & \text{sinon} . \end{array} \right.$$

Rem.2 T₁> On utilise le **Thm.2** pour prouver qu'une variable $g(X)$ fabriquée à partir d'une VAR à densité X est aussi à densité.

Exple.2 *Soit X une VAR de loi $\mathscr{N}(0, 1)$. Montrer que la VAR X^2 est à densité et en donner la loi.*

✍ On vérifie les points **a.** et **b.** de **Thm.2**

a. (*espace image*). X^2 est une VAR positive donc pour $I = \mathbf{R}_+$, $P(X \in I) = 1$.

b. (*calcul de $F_{X^2}(x)$ sur $\mathbf{R}$.*)
- **a.** $\Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}_-^\star \quad F_{X^2}(x) = 0$.
- Soit $x \geq 0$. L'évènement $X^2 \leq x$ est l'évènement $|X| \leq \sqrt{x}$, c'est-à-dire $X \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]$. Ces derniers ont donc mêmes probas. D'où pour $x \geq 0$, $F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$.

c. (*Vérification de* **Thm.2b.**) Par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$, F_{X^2} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_-^\star$ (elle y est nulle) et aussi sur $\mathbf{R}_+^\star$. Reste à voir la continuité en 0 :
- En 0^- la limite de F_{X^2} est 0, car F_{X^2} est nulle sur $\mathbf{R}_-$.
- en 0^+, par composition, et continuité de F_X sur $\mathbf{R}$ (car X est à densité), ainsi que de $\sqrt{\ }$ en 0 : $F_{X^2}(x) \underset{x>0}{\rightarrow} F_X(0) - F_X(0) = 0$.
- $F_{X^2}(0) = P(X^2 \leq 0) = 0$ par positivité de la var X^2.

— Ainsi : $F_{X^2}(0) = \lim_{0^+} F_{X^2} = \lim_{0^-} F_{X^2}$
F_{X^2} vérifie les hypothèses du **Thm.1** : X^2 est à densité et une densité s'obtient en dérivant F_{X^2} la où c'est possible.

[Transformation affine d'une variable à densité] **Prop.2**

Soit a, b deux réels tels que $a \neq 0$ et X une variable à densité. Soit $Y = aX + b$ la transformée affine de X. Alors :

a. Y est une variable aléatoire à densité.

b. Une densité de Y s'exprime en dehors d'un ensemble fini à l'aide d'une densité de X par

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Exple.3 Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, $Y = (b-a)X + a$ est a densité donnée par : $f_Y(y) = \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\dfrac{y-a}{b-a}\right)$. Or, $\dfrac{y-a}{b-a} \in [0,1] \Leftrightarrow y \in [a,b] \Leftrightarrow \mathbf{1}_{[a,b]}(y) = 1$. On retrouve bien la loi uniforme sur $[a, b]$.

II Moments

A) Moment d'ordre r

[Moment d'ordre r d'une VAR à densité] **Déf.5**

Soit $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$ et X une variable aléatoire à densité sur un espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ de densité f_x.

a. On dit que X admet un moment d'ordre r si l'intégrale

$$M_r := \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\mathrm{d}t$$

est **absolument** convergente.

b. Dans ce cas, le réel M_r s'appelle moment d'ordre r de X.

[Relation d'existence entre les moments] **Prop.3**

a. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leq r$.

b. En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance et une variance.

B) Espérance

[Espérance des variables à densité] **Déf.6**

Soit X une variable aléatoire à densité et f_X une densité de la loi X.

a. On dit que X admet une espérance si elle admet un moment d'ordre 1.

b. Si X admet une espérance, l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\mathrm{d}t$$

☠ on doit vérifier **l'absolue convergence.**

Exple.4 La densité définie sur $\mathbf{R}$ par $f_X(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+t^2}$ n'admet pas d'espérance.

[Propriétés de l'espérance] **Prop.4**

Soit X, Y deux variables aléatoires à densité sur un espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. En plus des propriétés classiques :

a. (*positivité*) Si X est à valeurs positives, $E(X) \geq 0$.

b. Si X admet une espérance, $|X|$ admet une espérance aussi et $|E(X)| \leq E(|X|)$.

[Formule de transfert] **Thm.3**

Soit X une variable à densité de densité f_X sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, et u une fonction telle que la VAR $u(X)$ est aussi une à densité.

a. $u(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_I u(t)f_X(t)\mathrm{d}t$ converge **absolument**.

b. Dans ce cas :

$$E(u(X)) = \int_I u(t)f_X(t)\mathrm{d}t$$

Rem.3 On peut ainsi connaître l'espérance de la variable $u(X)$ sans même disposer d'une densité de cette dernière.

C) Variance. Écart-type

[Moment d'ordre 2 d'une variable à densité. Variance] **Déf.7**

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X. On dit que X admet une variance si la VAR $[X - E(X)]^2$ admet une espérance et on pose alors :

$$V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right)$$

et $\sigma_X := \sqrt{V(X)}$ son écart-type.

[Caractérisation en termes de moments] **Prop.5**

X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2.

T2> Sert souvent pour étudier l'existence de la variance.

[Formule de Koenig] **Thm.4**

Si X admet une variance, alors X admet aussi un moment d'ordre 2 et :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

[Propriétés de la variance] **Prop.6**

Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et admettant une variance. Alors :

a. (*Positivité*). $V(X) > 0$. En particulier, une variable à densité ne peut être de variance nulle.

b. (*Homogénéité.*) Si X est exprimée en unités u, $V(X)$ est en unité u^2, et σ_X en unités u.

c. (*Homogénité et invariance par translation*). Si a, b sont deux réels :

$$V(ax+b) = a^2 V(X)$$

d. La variable aléatoire $\dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$ est centrée réduite.