Densités usuelles

Rappels

- $(\Omega, \mathscr{T}, P)$: espace probabilisé.
- $\mathscr{T}$: tribu des évènements.
- Revoir les propriétés universelles des fonctions de répartition.
- Si E est un intervalle, $\mathbf{1}_E(x) = 1$ si $x \in E$, et $\mathbf{1}_E(x) = 0$ sinon.

I Densités uniformes sur un segment

a) Définition

[Loi $\mathscr{U}(a, b)$] **Déf.1**

Soit $a < b$ deux réels et I un intervalle d'extrémités a, b. X suit une loi uniforme sur l'intervalle I si elle admet pour densité :

$$u_{a,b} = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(a, b)$.

Rem.1 | C'est la loi qui n'accorde aucune préférence (aucun biais) à tout réel de I. Le caractère ouvert ou fermé des extrémités n'intervient pas.

b) Fonction de répartition

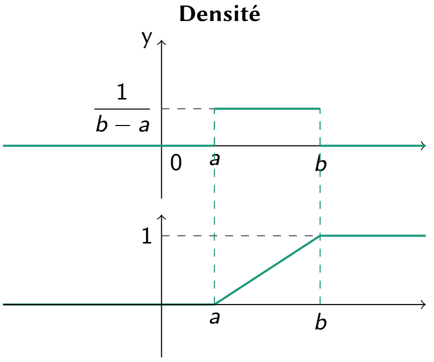
[Fonction de répartition] **Prop.1**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(a, b)$, sa fonction de répartition est la fonction :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

c) Graphique

Densité



Fonction de répartiton

d) Moments

[Moments de la loi $\mathscr{U}(a, b)$] **Prop.2**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(a, b)$, X admet une espérance et une variance et :

a. $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

b. $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

e) Simulation

```python
from random import random
def unif(a,b):
    retrurn a+(b-a)*random()
```

f) Propriétés complémentaires

[Proportion] **Prop.3**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(a, b)$, alors pour tout intervalle J, $P(X \in J) = \dfrac{M-m}{b-a}$ où m, M sont les extrémités de l'intervalle $J \cap [a, b]$.

Rem.2 | Résultat à la base des méthodes de simulation.

[Invariance par translation affine] **Prop.4**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}(0, 1)$, pour tous réels $a > 0$ (resp. $a < 0$) et b, la variable $Y = aX + b$ suit une loi $\mathscr{U}(b, a+b)$ (resp. $\mathscr{U}(a+b, b)$).

II Densités exponentielles

a) Définition

[Loi exponentielle de paramètre λ] **Déf.2**

Soit $\lambda > 0$. La VAR X suit une loi exponentielle de paramètre λ si elle admet pour densité :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

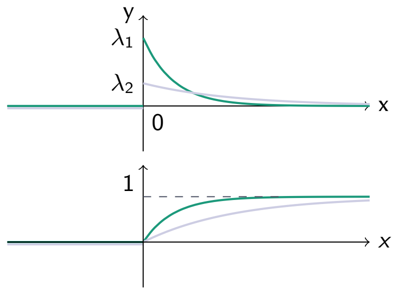
[Fonction de répartition] **Prop.5**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$, sa fonction de réaprtition est la fonction dónée par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad F_\lambda(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Graphique ($\lambda_1 > \lambda_2$)

Densité



Fonction de répartition

c) Moments

[Moments de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$] **Prop.6**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors X admet une epsérance et une variance et

a. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

b. et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

d) Simulation

On utilse le fait que si $U \rightsquigarrow \mathscr{U}(0, 1)$ alors $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln U \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$ (à prouver : par la méthode classique).

```python
from random import random
from numpy import log
def expo(landa):
  return -1/landa * log(random())
```

e) Propriétés complémentaires

[Absence de mémoire] **Prop.7**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors :$\forall (T,t) \in \mathbf{R}_+^{\star 2}$

$$P(X > T + t | X > T) = P(X > t)$$

[Changement d'échelle] **Prop.8**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda)$ pour $a > 0$, alors $aX \rightsquigarrow \mathscr{E}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

[Lien avec les lois géométriques] **Prop.9**

Voir Fiche `Lois usuelles des variables aléatoires discrètes` **II B) Prop. 3**

III Densités gaussiennes

a) Définition

[Loi $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$, $m \in \mathbf{R}, \sigma > 0$] **Déf.3**

a. La VAR X suit une loi normale de paramètres m, σ^2 si elle admet pour densité :

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(m,\sigma^2)$

b. La loi $\mathscr{N}(0,1)$ est appelée loi normale centrée réduite.

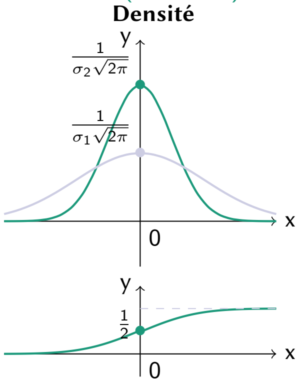
[Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite] **Déf.4**

Fonction notée Φ.

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

b) Graphique ($\sigma_1 > \sigma_2$), $m = 0$

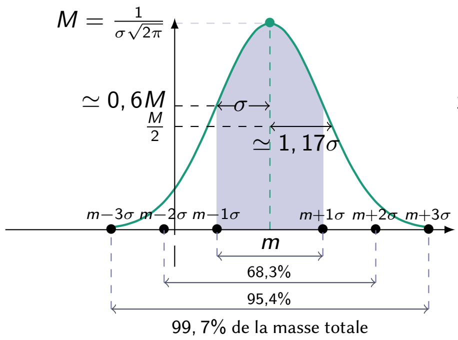
Densité



Fonction de répartition

c) Interprétation graphique des paramètres

Distribution de la masse



d) Moments

[Moments de la loi $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$] **Prop.10**

Si $\rightsquigarrow \mathscr{N}(m,\sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et :

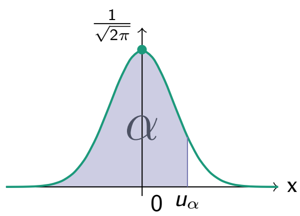
a. $E(X) = m$.

b. $V(X) = \sigma^2$

e) Quantiles

[Quantile d'ordre α] **Déf.5**

C'est l'unique réel u_α tel que $\Phi(u_\alpha) = \alpha$.



Rem.3 | Interprétation : u_α est l'abscisse au bout de laquelle on accumule la fraction α de la masse totale de la densité.

[Symétrie] **Prop.11**

$\forall x \in \mathbf{R} \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1.$

Rem.4 |

T1> Ainsi, si $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(0,1)$, pour $\alpha \in [1/2;1]$: $P(X \in [-u_\alpha, u_\alpha]) = 2\Phi(\alpha) - 1$.

f) Simulation

Pas de méthode de simulation explicitement au programme. L'oral du concours fournit e dans son formulaire la routine suivante pour simuler une VAR $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(0,1)$:

```python
import random as rd
X = rd.gauss(0,1)
```

Rem.5 |

a. On peut aussi d'après le théorème de Moivre-Laplace (fiche `Théorèmes limites`, **Thm.10**), simuler une variable X_n de loi $\mathscr{B}(n,p)$ (simuler une somme de variables de Bernoulli indépendantes). Il suit que $M_n^\star = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$ suit approximativement une loi $\mathscr{N}(0,1)$ en prenant p.ex $p = 1/2$, $n = 100$.

b. Avec **Rem. 7**, on peut aussi simuler une variable $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ à l'aide de $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(0,1)$: considérer $Y = m + \sigma X$.

Rem.6 | Fonctions utiles liées à la loi normale et implémentées sous **Python** :

```python
from scipy.stats  import norm
f_01 = norm.pdf # Densité N(0,1)
Phi = norm.cdf  # Fonction de rép.
u = norm.ppf    # Quantiles
```

console

```
In [1]: Phi(0.63)
Out[1]: 0.735652707884
In [2]: Phi(-2)
Out[2]: 0.0227501319481
In [3]: u(0.975) #connu
Out[3]: 1.9599639845
In [4]: u(0.25)
Out[4]: -0.674489750196
```

g) Propriétés complémentaires

[Invariance par transformation affine] **Prop.12**

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(m,\sigma^2)$ alors pour tous réels $a \neq 0$ et b, la variable $Y = aX + b$ suit une loi $\mathscr{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

Rem.7 | En particulier, si $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(0,1)$, la variable $Y = m + \sigma X$ suit une loi (m,σ^2).

[Somme de variables gaussiennes indépendantes] **Thm.1**

Soit $n \geq 2$ un entier. Si $X_1 \rightsquigarrow \mathscr{N}(m_1,\sigma_1^2)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathscr{N}(m_2,\sigma_2^2)$, ..., $X_n \rightsquigarrow \mathscr{N}(m_n,\sigma_n^2)$ sont n variables **mutuellement indépendantes**, alors $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit aussi une loi normale, de paramètres $m = m_1 + \cdots + m_n$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$.