Applications linéaires

Rappels

- Revoir la fiche de révisions de sup sur les applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$.
- E, F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, de dimension finie ou non.
- Les vecteurs (c-à-d. les éléments de E ou F) seront notés par des lettres grasses.

I Définitions générales

A) Terminologie

[Notations] **Déf.1**

a. $\mathscr{L}(E,F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F.

b. Si $f\mathscr{L}(E,F)$ est bijective, f s'appelle un isomorphisme.

c. $\mathscr{L}(E)=\mathscr{L}(E,E)$. Un élément de $\mathscr{L}(E)$ s'appelle un endomorphisme.

d. Un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ s'appelle un automorphisme.

B) Application linéaire

[Application linéaire] **Déf.2**

Une application $f : E \to F$ entre deux $\mathbf{K}$-ev est linéaire si pour tous vecteurs $\mathbf{u},\mathbf{v}$ de E et $\lambda\in\mathbf{K}$:

$$f(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v})=f(\mathbf{u})+\lambda f(\mathbf{v}).$$

Ce qui signifie que l'image d'une combinaison linéaire quelconque est la combinaison linéaire des images.

[Opérations] **Prop.1**

a. Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.

b. Une composée d'applications linéaires est linéaire.

c. Si une application linéaire est bijective, sa bijection réciproque aussi.

Exple.1 Très général :

a. L'application nulle $0 : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{0}\end{array}$ est linéaire.

b. L'identité $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x}\end{array}$ est linéaire.

c. Les homothéties de E $\lambda\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ \mathbf{x} & \mapsto & \lambda\mathbf{x}\end{array}$ aussi.

C) Exemples classiques

- **Dans les ev de Fonctions**

  a. Multiplication par une fonction donnée : Si $\mathbf{g}\in E=\mathscr{C}^0(I)$: $M_g : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{gf}\end{array}$

  b. Composition à droite par une fonction donnée : Si $\mathbf{g}\in E=\mathscr{C}^0(I)$: $Cg : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}\circ\mathbf{g}\end{array}$

  c. Dérivation : $\dfrac{d}{dx} : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^\infty(I) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(I) \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}'\end{array}$.

- **Dans les ev de Polynômes**

  a. Composition à droite : Si $\mathbf{Q}\in\mathbf{K}[X]$ est fixé : $T_\mathbf{Q} : \begin{array}{rcl} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \mathbf{P} & \mapsto & \mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\end{array}$ (cas classique : $\mathbf{Q}=\mathbf{X}+\mathbf{1}$, et dans ce cas $T_\mathbf{Q}(\mathbf{P})=\mathbf{P}(\mathbf{X}+\mathbf{1})$)

  b. $M_Q : \begin{array}{rcl} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \mapsto & QP\end{array}$

  c. $D : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ \mathbf{P} & \mapsto & \mathbf{P}'\end{array}$ (c'est la restriction de d/dx à $\mathbf{R}[X]$ pour $I=\mathbf{R}$).

- **Dans l'espace vectoriel des suites**

  — Le shift : $S_+ : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^\mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R}^\mathbf{N} \\ \mathbf{u}=(u_n)_{n\geq 0} & \mapsto & \mathbf{v}=(u_{n+1})_{n\geq 0}\end{array}$

Rem.1 $T_1>$ Dans les exos, les applications linéaires étudiées sont souvent des combinaisons linéaires et composées de ces applications classiques. On se contente souvent d'établir que ces dernières sont linéaires par `Déf. 2` et on utilise `Prop. 1`

D) Noyau - injectivité

[Noyau] **Déf.3**

Si $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $\ker f$ et l'ensemble des solutions $\mathbf{u}\in E$ de l'équation linéaire homogène $f(\mathbf{u})=0$.

[Propriétés du noyau] **Prop.2**

Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

a. $\ker f$ est un sev de E.

b. f est injective si et seulement si la seule solution de $f(\mathbf{u})=\mathbf{0}$ est $\mathbf{0}$.

c. Si f est injective, pour tout second membre $\mathbf{v}\in F$, l'équation $f(\mathbf{u})=\mathbf{v}$ a **au plus** une seule solution.

Exple.2 Dans $E=\mathbf{R}_3[X]$, si $f : P\mapsto P'$ le noyau de P est l'ensemble des solutions de l'équation $P'=0$: ce sont les polynômes constants. En notant $\mathbf{1}$ le polynôme constant égal à $\mathbf{1}$, $\ker f=\mathrm{Vect}(\mathbf{1})$. En particulier f n'est pas injective.

E) Image - surjectivité

[Image] **Déf.4**

Si $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $\mathrm{Im}\, f$ et l'ensemble valeurs prises par f : $\mathrm{Im}\, f=\{f(\mathbf{u})\quad\mathbf{u}\in E\}$

[Propriétés de l'image] **Prop.3**

Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

a. $\mathrm{Im}\, f$ est un sev de F.

b. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f=F$.

c. Si f est surjective, alors pour tout second membre $v\in F$, l'équation $f(\mathbf{u})=\mathbf{v}$ a **au moins** une solution u dans E.

Exple.3 Dans $E=\mathbf{R}_3[X]$, si $f : \mathbf{P}\mapsto\mathbf{P}'$, f n'est pas surjective puisque si $\mathbf{P}\in E$ le degré de $f(\mathbf{P})$ est au plus 2, donc l'équation $f(\mathbf{P})=\mathbf{Q}$ n'a pas de solution dans E pour le second membre $\mathbf{Q}=\mathbf{X}^3$ par exemple.

f) Bijectivité

[Bijectivité] Déf.5
$f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective si elle est injective et surjective.

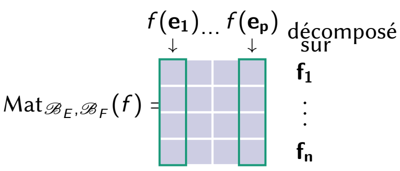
II Cas de la dimension finie

Si on dispose de bases dans E et F, tout peut être envisagé par un traitement matriciel, c-à-d. en ***coordonnées***

Ne pas oublier de **reconvertir en vecteurs** dans la réponse finale les colonnes calculées (= coordonnées de ces vecteurs sur les bases de travail.)

a) Matrice d'une application linéaire sur des bases

[Matrice d'une application linéaire sur des bases données] Déf.6
Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie respectivement p et n. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B}_E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$, et $\mathscr{B}_F = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$, des bases respectives de E et F. La matrice de f sur les bases $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$ est la matrice dont la j-ème colonne est celle des coordonnées du vecteur $f(\mathbf{e}_j)$ décomposé sur la base $\mathscr{B}_F$ (`Déf. 11` fiche `Espaces vectoriels`) :



Exple.4
Si $\Delta : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ définie par : $\Delta(\mathbf{P}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}+1) - \mathbf{P}$, sa matrice A sur les bases canoniques est :

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \Delta(1) & \Delta(X) & \Delta(X^2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coord. sur } \mathbf{1} \\ \leftarrow \text{coord. sur } \mathbf{X} \\ \leftarrow \text{coord. sur } \mathbf{X}^2 \end{array}$$

[Égalité de deux app. lin] Cor.1
Deux applications linéaires ayant les mêmes matrices sur des bases données sont égales.

[App. can. associée] Déf.7
Inversement , si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, A peut être vue comme la matrice de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ dont la matrice sur les bases canoniques est A.

b) Analyse matricielle du noyau

[Base du noyau] Thm.1
Avec les notations de `Déf.6` Un système d'équations du noyau de f, et donc une base de ce dernier (**en coordonnées**) s'obtient à partir du système linéaire $(A|0)$, et f est injective ssi $\mathrm{rg}\, A = p$.

Exple.5 Si on reprend **Exple 4.**, en remontant le système linéaire $(A|0)$, les solutions **en coordonnées** sont Vect $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Revenant **en polynômes**, $\mathrm{Ker}\Delta = \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$.

c) Cas de l'image

[Base de l'image] Thm.2
Avec les notations de `Déf.6`, une famille génératrice de l'image de f est donnée (**en coordonnées**) par les colonnes de A. En extrayant de cette famille une famille libre, on en tire une base de l'image de f, et f est surjective ssi $\mathrm{rg}(A)=n$.

Exple.6 Reprenons **Exple 4.** L'image de Δ est engendrée **en coordonnées par les colonnes** de A, donc par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui sont les coordonnées sur la base canonique des polynômes $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ et $\mathbf{Q} = \mathbf{1} + 2\mathbf{X}$, donc $\mathrm{Im}\Delta = \mathrm{Vect}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Comme $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ sont non colinéaires, ils en forment une famille libre, donc une base de $\mathrm{Im}\,\Delta$.

d) Rang. Théorème du rang

[Rang d'une app. lin] Déf.8
Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

[Calcul du rang] Thm.3
Avec les notations de la définition `Déf. 6`, le rang de f est celui de A.

[Th. du rang] Thm.4
Si E est de dimension finie, et si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Im} f$ est de dimension finie et : $\dim \ker f + \mathrm{rg}\, f = \dim E$.

Rem.2
T2> Les combinaisons linéaires de colonnes permettent rapidement de trouver des vecteurs du noyau (voir fiche `révision 18` sur les applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ **Exple 6.**). Cette technique, combinée au théorème du rang, permet rapidement de trouver une base du noyau.

Exple.7 Dans le précédent exemple, on voit que $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{1}$ est dans le noyau de l'endomrphisme Δ. Comme A est visiblement de rang 2, Δ est de rang 2 (`Thm. 3`). Avec le théorème du rang, $\ker \Delta$ est de dimension $3 - 2 = 1$. Comme on a trouvé un vecteur non nul du noyau, il en constitue une base donc une base de $\ker \Delta$ est la famille $(\mathbf{1})$.

III Matrices semblables. Changement de base

[Matrices semblables] Déf.9
Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ sont semblables si et seulement si il existe une matrice P **inversible** telle que $B = P^{-1}AP$.

[Formule du changement de base] Thm.5
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$, dont $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases. Soit A (resp. A') la matrice de f sur la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$) et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors A et A' sont liées par : $A' = P^{-1}AP$

[Interprétation] Cor.2
Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme mais écrit sur des bases différentes. Elles ont donc le **même spectre**.