Produit scalaire, projection orthogonale

Prérequis Rappels

- La transposée de la matrice A est notée A^T
- Le produit scalaire est noté $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$
- Typ. $\Pi_F(\mathbf{u})$ Projection orthogonale : un vecteur de F.
- Typ. Π_F Projecteur orthogonal : un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.
- $\pm\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ est de norme 1.

I Géométrie linéaire de base

a) Droite du plan

Équation cartésienne :
$ax+by+c=0 \quad (a,b)\neq(0,0)$ a, b, c : coefficients de l'équation (ce sont des réels).

- **a.** ☠ Si $(a,b)=(0,0)$ ce n'est pas une droite !
- **b.** Sinon $\mathbf{u}=(-b,a)$ en est un vecteur directeur.
- **c.** et $\mathbf{n}=(a,b)$ en est un vecteur normal.
- **d.** En faisant varier c, on obtient des droite parallèles toutes dirigées par $\mathbf{u}$
- **e.** Si $c=0$, on a une droite vectorielle (passant par $\mathbf{0}=(0,0)$). Cette droite est donc $\operatorname{Vect}(\mathbf{u})$.

Exple.1

- **a.** $2x+y-3=0$: équation d'une droite dirigée par $\mathbf{u}=(-1,2)$.
- **b.** $2x+y-5=0$: équation d'une droite parallèle à la précédente.
- **c.** $x+y+3=0$ et $-x+y+2=0$ sont les équations de droites perpendiculaires puisqu'un vecteur directeur de l'une est normal pour l'autre

Exple.2

T1> Si $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -2 & 5\end{pmatrix}$, $A+3I=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & 8\end{pmatrix}$ qui est de rang 1, donc : -3 est valeur propre, et le sev propre associé qui est $\operatorname{Ker} A+3I$ est de dimension 1 d'après le théorème du rang. C'est donc une droite. Une équation enest donné par la première ligne de $A+3I$: $x-4y=0$. Comme un vecteur directeur de cette droite est $(4,1)$, $\operatorname{Ker} A+3I=\operatorname{Vect}((4,1))$.

b) Plan de l'espace

Équation cartésienne :
$ax+by+cz+d=0 \quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$
a, b, c : coefficients de l'équation.

- **a.** ☠ Si $(a,b,c)=(0,0)$ ce n'est pas un plan !
- **b.** Sinon $\mathbf{n}=(a,b,c)$ en est un vecteur normal.
- **c.** En faisant varier d, on obtient des plans parallèles tous orthogonaux à $\mathbf{n}$
- **d.** Si $d=0$, on a un plan vectoriel (passant par $\mathbf{0}=(0,0,0)$).

Exple.3

- **a.** $2x+y-3z+4=0$: plan normal à $\mathbf{n}=(2,1,-3)$.
- **b.** $2x+y-3z+5=0$: plan parallèle au précédent.
- **c.** $x+y+z+3=0$ et $x-z+2=0$ sont les équations de plans orthogonaux puisque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

c) Hyperplan de $\mathbf{R}^n$

Équation cartésienne :
$a_1x_1+\cdots+a_nx_n+k=0\,(a_1,\dots,a_n)\neq(0,\dots,0)$

- **a.** Si $(a_1,\dots,a_n)=(0,\dots,0)$, ce n'est pas un hyperplan.
- **b.** Si $k=0$ c'est un hyperplan vectoriel (car il passe par $\mathbf{0}=(0,\dots,0)$).
  1) Il est de dimension $n-1$.
  2) Il est orthogonal à $\mathbf{n}=(a_1,\dots,a_n)$.
- **c.** Les hyperplans vectoriels du plan sont les droites vectorielles ($n=2$).
- **d.** Les hyperplans vectoriels de l'espace sont les plans vectoriels ($n=3$).
- **e.** Si $k\neq 0$, on a un hyperplan parallèle à celui pour $k=0$, puisqu'il admet aussi $\mathbf{n}$ comme vecteur normal.

Exple.4

- **a.** $x+y+z+t=3$ est l'équation d'un hyperplan de $\mathbf{R}^4$. Il est parallèle à l'hyperplan vectoriel d'équation $x+y+z+t=0$ puisqu'ils admettent tous deux le vecteur $\mathbf{n}=(1,1,1,1)$ comme vecteur normal.
- **b.** Dans $\mathbf{R}^{12}$, $x_8=0$ est l'équation d'un hyperplan vectoriel de vecteur normal : $\mathbf{n}=(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0)$

II Produit scalaire

a) Propriétés du produit scalaire, de la norme

[Règles de calcul] Prop.1

Soit $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in(\mathbf{R}^n)^3$. En posant $U=\operatorname{Mat}(\mathbf{u})$, et $V=\operatorname{Mat}(\mathbf{v})$, on a :

- **a***.
$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = U^TV = V^TU=\sum_{i=1}^n u_iv_i$$
- **b.** $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\|\mathbf{u}\|^2\geq 0$.
- **c.** $\forall\lambda\in\mathbf{R}\;\|\lambda\mathbf{u}\|^2=\lambda^2\,|\mathbf{u}|^2$ et $\|\lambda\mathbf{u}\|=|\lambda|\,\|\mathbf{u}\|$
- **d.** $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=0\Leftrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{0}$.
- **e.** $\|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\pm 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\|\mathbf{v}\|^2$
- **f.** $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{v}\|^2$
- **g.** $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2\quad\langle\alpha\mathbf{u},\beta\mathbf{v}\rangle=\alpha\beta\,\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$.
- **h.** $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$.

[Inégalités de Cauchy-Schwarz] Thm.1

$\forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$:

- **a.** $|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\leq\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$
- **b.** $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$.

b) Familles orthogonales

[Caractérisation matricielle] Prop.2

Si $\mathscr{F}=(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p)$ est une famille de p vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et si $A=\operatorname{Mat}(\mathscr{F})$ alors :

- **a.** $\mathscr{F}$ est orthogonale $\Leftrightarrow$ A^TA est diagonale inversible (*i.e.* sans zéros sur la diagonale).
- **b.** $\mathscr{F}$est orthonormée$\Leftrightarrow$ $A^TA=I_p$.

Rem.1

$A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ donc $A^TA\in\mathscr{M}_p(\mathbf{K})$!

[Indépendance linéaire ⋆⋆⋆] Thm.2

Les familles orthogonales de vecteurs sont libres (en particulier, elles ne contiennent jamais le vecteur nul).

[Coordonnées sur une base orthogonale/orthonormée] **Thm.3**

Si $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p})$ est une famille orthogonale. Alors :

a. $\mathscr{F}$ est une base de $F = \text{Vect}(\mathscr{F})$.

b. $\left\| \sum_{j=1}^{p} \mathbf{u}_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{p} \|\mathbf{u_j}\|^2$

c. si $\mathbf{x} \in F$:

1) la coordonnée de $\mathbf{x}$ sur le vecteur $\mathbf{u}_j$ est : $\lambda_j = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u_j}\|^2}$,

2) $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{u_j}$

III Projecteur orthogonal

A) Propriétés

[Projecteur orthogonal sur un sev] **Prop.3**

Le projecteur orthogonal Π_F sur F :

a. est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

b. Son image est F : $\text{Im}\Pi_F = F$.

c. Son noyau est le sev noté $F^\perp$ des vecteurs orthogonaux à tous ceux de F. (donc 0 est valeur propre dès que $F \neq \mathbf{R}^n$).

d. $\Pi_F \circ \Pi_F = \Pi_F$.

e. $\mathbf{x} \in F \Leftrightarrow \Pi_F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. (donc 1 est valeur propre et le sev propre associé est $\text{Im}F$).

Rem.2

a. Avec le théorème du rang et **c.** et **e.**, les projecteurs orthogonaux sont donc diagonalisables.

b. T_2> Pour montrer qu'une application f est le projecteur orthogonal sur un sev F, on montre :

1) que f est un endomorphisme.

2) que son image est contenue dans F.

3) que son noyau est $F^\perp$.

4) que $f \circ f = f$.

[Théorème de Pythagore] **Prop.4**

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \|\mathbf{x}\|^2 = \|\Pi_F(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{x} - \Pi_F(\mathbf{x})\|^2$

[Projecteur sur $F^\perp$] **Prop.5**

Si Π_F est le projecteur orthogonal sur F, $Id - \Pi_F$ est le projecteur orthogonal sur $F^\perp$.

B) Caractérisation de la projection orthogonale

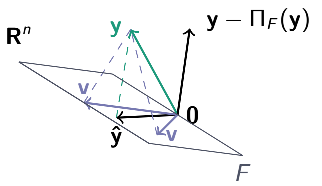
[caractérisation] **Thm.4**

Soit $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ et $\hat{\mathbf{y}} \in F$. Sont équivalents :

a. $\hat{\mathbf{y}} = \Pi_F(\mathbf{y})$.

b. $\hat{\mathbf{y}} \in F$ et $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ est orthogonal à tout vecteur d'une base de F (et donc à tout vecteur de F).

c. Minimum de distance. $\forall \mathbf{v} \in F\ \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2 \geq \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2$, c-à-d. que l'on a : $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 = \min_{\mathbf{v} \in F} \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|^2$.



Le trait pointillé est de longueur minimale lorsque $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{y}} = \Pi_F(\mathbf{y})$.

IV Calculs de projections orthogonales

A) Projecteur orthogonal sur la droite $\mathscr{D} = \text{Vect}(u)$

La projection orthogonale du vecteur $\mathbf{x}$ sur $\mathscr{D} = \text{Vect}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) est (**Thm.3-1)**) :

$$\Pi_{\mathscr{D}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

De plus : $\text{Mat}(\Pi_{\mathscr{D}}) = \dfrac{1}{\underbrace{U^T U}_{\|\mathbf{u}\|^2}} \times UU^T$.

Exple.5

T_3> La projection orthogonale du vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ sur la droite $\mathscr{D} = \text{Vect}(\mathbf{u})$ où $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ est :

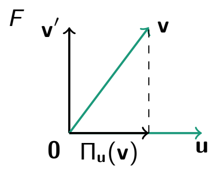
$$\Pi_{\mathscr{D}}(\mathbf{u}) = \frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3}{9} \mathbf{u} \in \mathscr{D}.$$

B) Projecteur orthogonal sur le plan $F = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

a. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sont orthogonaux : ils forment une base orthogonale de F. La projection orthogonale du vecteur $\mathbf{x}$ sur F est :

$$\Pi_F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

b. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ne sont pas orthogonaux : Soit $\Pi_\mathbf{u}$ le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(\mathbf{u})$. Comme $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \Pi_\mathbf{u}(\mathbf{v})$ est orthogonal à $\mathbf{u}$ et dans F (**Thm.4 b.**), $(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$ forment une base orthogonale de F. On est donc ramené au cas du IV B) **a.** ci-dessus, avec la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$.



La base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de F n'est pas orthogonale, mais la base $(\mathbf{u}, \underbrace{\mathbf{v} - \Pi_\mathbf{u}(\mathbf{v})}_{\mathbf{v}'})$ l'est.

Exple.6

T_4> Soit $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 0)$. La projection orthogonale de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ sur le plan $F = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est :

$\Pi(\mathbf{x}) = \dfrac{x_1 + 2x_2 + 2x_3}{9}\mathbf{u} + \dfrac{-2x_1 + x_2}{5}\mathbf{v}$ puisque $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux.

C) Projecteur orthogonal sur un hyperplan

Si H est un hyperplan de vecteur normal $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, $\mathscr{D} = \text{Vect}(\mathbf{n})$ est une droite, et $\mathbf{x} - \Pi_{\mathscr{D}}(\mathbf{x})$ est la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ sur H (**Prop.5**). Le calcul se réduit donc à celui de $\Pi_{\mathscr{D}}(\mathbf{x})$(cas IV A)).

Exple.7

T_5> *Expression de la projection orthogonale d'un vecteur $\mathbf{x} = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ sur le sev* $F = \{(x, y, z, t) \quad x - y + z - t = 0\}$. On remarque que $\dim F = 3$ (c'est le noyau de $(x, y, z, t) \mapsto x - y + z - t$). Ainsi F a pour vecteur normal $\mathbf{n} = (1, -1, 1, -1)$. La projection orthogonale de $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ sur $\mathscr{D} = \text{Vect}(\mathbf{n})$ est donc :

$$\Pi_{\mathscr{D}}(\mathbf{x}) = \frac{x - y + x - t}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}\mathbf{n}.$$

D'où la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ sur F :

$$\Pi_F(\mathbf{x}) = \underbrace{(x, y, z, t)}_{\mathbf{x}} - \underbrace{\frac{x - y + z - t}{4}(1, -1, 1, -1)}_{\Pi_{\mathscr{D}}(\mathbf{x})}$$