Couples de VAR discrètes

Prérequis Notations

- Connaître les règles de calculs de sommes doubles.
- I, J : sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
- $(\Omega, \mathscr{T}, P)$: espace probabilisé fixé et X, Y deux VAR discrètes sur Ω.
- $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ familles de nombres indexées sur I et J. Ces familles sont finies si I et J sont finis. Sinon, ils sont infinis et dénombrables.
- On pose ici : $X(\Omega) = \{x_i \quad i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \quad j \in J\}$.

I Couples de VAR discrètes

A) Couple

[Couple] Déf.1
Donnée de deux var discrètes X et Y définies sur le même espace Ω. Le couple est noté (X, Y) (l'ordre compte).

B) Loi conjointe

[Loi du couple ou conjointe] Déf.2
C'est la mesure de probabilité induite par la fonction de masse π définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ par :

$$\pi(x_i, y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j) \underset{\text{notation}}{=} P(X = x_i, Y = y_j)$$

Rem.1

a. C'est bien une fonction de masse car la somme double $\sum \pi(x_i, y_j)$ converge vers 1 en appliquant dans le calcul de la somme double deux fois successivement la formule des probabilités totales.

b. Il arrive de représenter la loi conjointe dans un tableau :

$x =$ \ $y =$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$
x_1					
x_2					
$\vdots$				$\downarrow$	
x_i			$\rightarrow$	$P(X = x_i, Y = y_j)$	
$\vdots$					

C) Lois marginales

[Lois marginales] Déf.3
Si (X, Y) est le couple, les lois marginales du couple sont les lois des VAR X et Y.

[Loi conjointe donne lois marginales] Thm.1
Soit $x \in X(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE associé à Y la série de t.g. $P(X = x, Y = y_j)$ converge et :

$$P(X = x) = \sum_{j\in J} P(X = x, Y = y_j)$$

Rem.2

a. On a évidemment un résultat semblable pour l'obtention de $P(Y = y)$.

b. Ainsi les lois marginales se trouvent en marge du tableau de la loi conjointe, d'où leur nom.

D) Lois conditionnelles

[Loi cond. de X sous $Y = y$] Déf.4
Soit (X, Y) un couple de var discrètes. Si $y \in Y(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sous l'observation de $Y = y$ est la mesure de probabilité induite par la fonction de masse π définie sur $X(\Omega)$ par :

$$\forall i \in I \quad \pi(x_i) = P_{Y=y}(X = x_i).$$

Rem.3

a. Définition semblable pour la loi de Y conditionnellement à $X = x$.

b. X a autant de lois conditionnelles que de valeurs prises par Y.

c. $\boxed{T_1>}$ La connaissance de loi marginale de X et des lois conditionnelles de Y permet de retrouver la loi conjointe

Exple.1 Cas typique : X suit une loi usuelle et les lois conditionnelles de Y sous l'observation de X sont des lois usuelles. C'est le cas si p.ex on lance un dé (Var X de loi $\mathscr{U}(6)$) et qu'ensuite on lance une pièce X fois et qu'on note Y le nombre de pile obtenues (les lois conditionnelles de Y sont des lois binomiales).

II Moments

A) Formule de transfert

[De transfert] Thm.2
Soit u une fonction de deux variables et soit $Z = u(X, Y)$. Si les séries figurant dans l'expression ci-après convergent absolument, alors Z admet une espérance et

$$E(Z) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u(x_i, y_j) P(X = x, Y = y) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

Rem.4 L'hypothèse est bien une hypothèse de **convergence absolue**.

B) Covariance

[Covariance de deux var] Déf.5
Pour deux variables admettant des moments d'ordre 2 :

$$\operatorname{cov}(X, Y) := E\left[(X - E(X)) \times (Y - E(Y))\right]$$

Son signe renseigne sur la tendance qu'ont ces variables à évoluer dans le même sens.

[Propriétés de la covariance] Prop.1
La covariance est bilinéaire, et $\operatorname{cov}(X, X) = V(X)$.

[Formule de Koenig] Thm.3
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la relation suivante a un sens et est vraie :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

III Indépendance

a) Variables indépendantes

[Lemmes des sous-familles et des coalitions] **Prop.2**

Soit $n \geq 3$ un entier et $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires.

- **a.** Les familles de var indépendantes sont stables par extraction.
- **b.** Si r est un entier tel que $1 < r < n$ et $f : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^{n-r} \to \mathbf{R}$ deux fonctions, alors les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_r)$ et $g(X_{r+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Rem.5

T2> Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors, par le lemme des coalitions, les variables $X_1 + \cdots + X_{n-1}$ et X_n sont mutuellement indépendantes. Cette propriété est particulièrement utile lorsque l'on souhaite démontrer par récurrence des propriétés sur des sommes de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

b) Corrélation et dépendance

[Variables décorrélées] **Déf.6**

X, Y sont décorrélées si leur covariance est nulle. Sinon, on dit qu'elles sont corrélées.

[Espérance de variables décorrélées] **Prop.3**

Deux variables X et Y sont décorrélées si et seulement si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

[Lien entre les notions] **Prop.4**

X, Y indépendantes	$\Rightarrow$	$\operatorname{cov}(X, Y) = 0$
$\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0$	$\Rightarrow$	X, Y dépendantes

Rem.6 Ainsi pour deux variables X, Y indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

IV Résultats sur les sommes de VAR

a) Moments

[Moments des sommes] **Prop.5**

- **a.** $E(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$
- **b.** $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$.
- **c.** En particulier, si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes : $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

b) Loi de $X + Y$ où X, Y sont entières positives

[Loi de $X + Y$] **Thm.4**

Soit X, Y deux var discrètes sur Ω telles que $X(\Omega) \subset \mathbf{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbf{N}$. Alors $Z = X + Y$ est aussi à valeurs dans $\mathbf{N}$ et sa loi est donnée par : $\forall n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X = n-k, Y = k) \end{aligned}$$

Rem.7 Comme pour les variables à densité, ce calcul est celui d'une convolution. Il est donc important, dans la somme qui définit $P(Z = n)$ de bien déterminer le *support*, c'est-à-dire la liste des indices k pour lesquelles $P(X = n-k, Y = k) \neq 0$ pour que les bornes de la somme soient correctement définies.

c) Stablilité des lois binomiales

[Somme de binomiales indépendantes] **Thm.5**

Soit $p \in]0, 1[$ est donné, N_1, N_2 deux entiers > 0. Si $X_1 \rightsquigarrow \mathscr{B}(N_1, p)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathscr{B}(N_2, p)$ et sont **mutuellement indépedantes** alors $Z = X_1 + X_2$ suit une loi $\mathscr{B}(N_1 + N_2, p)$.

d) Stablilité des lois de Poisson

[Somme de Poisson indépendantes] **Thm.6**

Soit λ_1, λ_2 réels > 0. Si $X_1 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$, $X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$ et sont **mutuellement indépedantes** alors $Z = X_1 + X_2$ suit une loi $\mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Rem.8 Ces deux derniers théorèmes s'étendent à un nombre fini arbitraire de variables **mutuellement indépendantes** (et de **même paramètre de succès pour des variables binomiales**).