Fonctions de deux variables

Rappels

- Le plan est identifié à $\mathbf{R}^2$.
- Ω est un ouvert du plan.
- f est une fonction de deux variables définie sur Ω à valeurs réelles.

I Rappels de géométrie

a) Équation d'un cercle du plan

[Équation de cercle dans le plan] **Thm.1**

Soit a, b deux réels. L'ensemble L_k des points (x, y) du plan $\mathbf{R}^2$ tels que

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$$

est :

a. Vide si $k < 0$.

b. Le cercle de centre (a, b) de rayon $\sqrt{k}$ sinon.

Rem.1 | Intervient souvent dans la recherche de lignes de niveau d'une fonction de deux variables.

b) Pavé ouvert du plan

[Pavé ouvert] **Déf.1**

Tout ensemble P de la forme $P =]\alpha, \beta[\times]\gamma, \delta[$ où $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ sont des réels.

Rem.2 | Graphiquement, c'est un rectangle, bords exclus.

c) Ouvert du plan

[Ouvert du plan] **Déf.2**

Tout ensemble Ω de $\mathbf{R}^2$ tel que pour tout point (a, b) de Ω il existe un pavé ouvert P contenu dans Ω et contenant (a, b).

Rem.3 | Garantit que pour une fonction de deux variables définie sur Ω, les fonctions partielles de f en (a, b) sont définies au moins sur des intervalles ouverts centrés respectivement en a et b, voir **Rem.4 a.**

d) Lignes de niveau d'une fonction de deux variables

[ligne de niveau k de f] **Déf.3**

Si $f : \Omega \to \mathbf{R}$, la ligne de niveau k de f est le sous-ensemble $\mathscr{L}_k$ des points (x, y) de Ω tels que $f(x, y) = k$.

Exple.1 |
Si $f : (x, y) \mapsto (x-1)^2 + y^2$, la ligne de niveau k de f est vide si $k < 0$, sinon c'est le cercle de centre $(1, 0)$ de rayon $\sqrt{k}$ d'après **Thm.1**.

II Fonctions partielles

a) Fonctions partielles en un point

[Fonctions partielles] **Déf.4**

Si $(a, b) \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbf{R}$.

a. La première fonction partielle de f en (a, b) est :

$$f_1 : x \mapsto f_1(x, b).$$

b. La seconde fonction partielle de f en (a, b) est :

$$f_1 : y \mapsto f_2(a, y).$$

Rem.4 |

a. Elles sont définies respectivement au voisinage a et b puisque Ω est ouvert.

b. Si on change de point (a, b), les fonctions partielles changent.

Exple.2 | Si $f(x, y) = e^{xy} + y - x^2$ les fonctions partielles de f au point $(3, 4)$ sont données par $f_1(x) = e^{4x} + 4 - x^2$ et $f_2(y) = e^{3y} + y - 9$.

b) Dérivées partielles

[Dérivées partielles en un point] **Déf.5**

Avec les notations de **Déf.4** , leur existence est synonyme de dérivabilité au points a et b des fonctions partielles en (a, b). Dans ce cas :

a. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_1'(a)$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_2'(b)$.

Rem.5 | Typ. ☠
Ce sont des nombres, pas des fonctions !

Exple.3 | Les dérivées partielles en $(3, 4)$ de la fonction f de l'exemple **Exple. 2** existent et sont données par :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 4) = f_1'(3) = 4e^{12} - 6$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = f_2'(4) = 3e^{12} + 1$.

[Fonctions dérivées partielles] **Déf.6**

Avec les notations de **Déf.**, les dérivées partielles sont les fonctions :

a. $(a, b) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

b. $(a, b) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

Elles sont définies respectivement aux points (a, b) de Ω en lesquels la dérivée partielle première et seconde au poont (a, b) existe.

Rem.6 |
T1> Pour obtenir leur expression, on gèle une variable, qui est alors considérée comme une constante, et on dérive par rapport à l'autre.

Exple.4 | Les fonctions dérivées partielles de la fonction f de l'exemple **Exple. 2** sont : $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto ye^{xy} - 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto xe^{xy} + 1$.

c) Gradient d'une fonction en un point

[Gradient de f en (a, b)] **Déf.7**

C'est le vecteur défini par :

$$\vec{\text{grad}}_{(a,b)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right).$$

Exple.5 | Si $f(x, y) = x^2 - y^2$, puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2a$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -2b$, on obtient : $\vec{\text{grad}}_{(a,b)} f = (2a, -2b)$.

[Gradient et lignes de niveau] **Prop.1**

Si (a, b) est un point de la ligne de niveau k $\mathscr{L}_k$ de f, alors $\vec{\text{grad}}_{(a,b)} f$ est orthogonal à $\mathscr{L}_k$ au point (a, b).

Rem.7 | Ce résultat se démontre avec le théorème **Thm.4** , voir **Exple.8**.

[Point critique d'une fonction] **Déf.8**
Les points critiques de f sont par définition les points (a,b) en lesquels $\overrightarrow{\text{grad}}_{(a,b)} f = \vec{0}$, ce qui équivaut à la nullité des dérivées partielles de f en (a,b) d'après **Déf.7**.

Rem.8 | T2> La recherche des points critiques consiste en la résolution de système de deux équations à deux inconnues, mais par forcément linéaires!

Exple.6 | Les points critiques de $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ sont d'après **Exple. 5** les points (a,b) en lesquels $(2a, -2b)$ est le vecteur nul, ce qui donne le système de deux équations d'inconnues (a,b) suivant, qui est en l'occurrence linéaire :

$$\begin{cases} 2a &= 0 \\ -2b &= 0 \end{cases}$$

Il y a un seul point critique qui est $(a,b) = (0,0)$.

III Résultats complémentaires

a) Continuité en un point d'une fonction de deux variables

a. Pas de définition de la continuité en un point (a,b) d'une fonction de deux variables au programme.

b. Intuitivement la continuité en (a,b) signifie : si (x,y) est proches de (a,b), alors $f(a,b)$ et $f(x,y)$ sont proches aussi.

b) Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

[Condition suffisante pour $\mathscr{C}^1$] **Thm.2**
Si f a des fonctions dérivées partielles continues au sens (plus que flou) précédent, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ en (a,b).

Rem.9 | T3> On ne sait pas plus ce qu'est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ avec ce qui vient d'être dit, mais disons que si les fonctions sont définies par des fonctions usuelles et pas par disjonction de cas, vous aurez des fonctions $\mathscr{C}^1$.

c) Lemme de Schwarz

[Lemme de Schwartz] **Thm.3**
Si les fonctions dérivées partielles secondes de f sont continues en (a,b) alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b).$$

d) Dérivée le long d'une courbe

[dérivée le long d'une courbe] **Thm.4**
Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Si $I \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in \Omega$ est une fonction à valeurs dans Ω dérivable et si φ est la fonction définie par :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = f(x(t), y(t))$$

alors

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \\ &\quad + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \\ &= \underbrace{\frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{(x(t),y(t))} f}_{\text{produit scalaire de deux vecteurs}} \end{aligned}$$

Rem.10 | T4> En pratique, on utilise cette formule seulement si les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y(t)$ sont inconnues. Sinon, on les remplace dans f par leurs expressions, et on dérive directement φ!

Exple.7 | Si $f(x,y) = x^3 y - xy^3$ et $\varphi(t) = f(\underbrace{t}_{x(t)}, \underbrace{1-t}_{y(t)})$, alors :

$$\varphi(t) = t^3(1-t) - t(1-t)^3$$

et il est très simple de dériver φ, puisque c'est un polynôme!

Exple.8 | *Preuve de la propostion* **Prop. 1** : Si la ligne de niveau $\mathscr{L}_k$ de f est paramétrée par une courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$, alors :

$$\forall t \in I \quad \underbrace{f(x(t), y(t))}_{\varphi(t)} = k,$$

et en dérivant cette relation, on obtient $\varphi'(t) = 0$. Ce qui donne bien par **Thm.4** :

$$\underbrace{\frac{d\vec{M}}{dt}}_{\text{vecteur tangent à } \mathscr{L}_k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{(x(t),y(t))} f = 0.$$

e) Condition suffisante d'extremum

[Maximum local] **Déf.9**
On dit que f présente un maximum local en (a,b) si pour un pavé P ouvert conteant (a,b) et contenu dans Ω on a :

$$\forall (x,y) \in P \quad f(x,y) \leq f(a,b).$$

Rem.11 |

a. Si La relation ci-dessus est vraie en remplaçant P par Ω lui-même, le maximum est qualifié d'absolu.

b. Un maximum absolu est donc *a fortiori* un maximum local.

c. Un extremum local est par définition ou un minimum ou un maximum local.

[Extrema et points critiques] **Thm.5**
Les extrema locaux d'une fonction de deux variables f sont nécessairement parmi les points critiques de f.

Exple.9 | Si la fonction f de l'**Exple.6** admet un extremum local , ce ne peut-être qu'en $(a,b) = (0,0)$

f) Approximation linéaire de Taylor

[Taylor] **Thm.6**
Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$. Si h, k sont deux réels assez petits, alors une valeur approchée de $f(x_0 + h, y_0 + h)$ est :

$$f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Exple.10 | Si on veut une valeur approchée de $(1,01)^{3.02}$, comme $1^3 = 1$, on pose $(x_0,y_0) = (1,3)$, $(h,k) = (0,01; 0,02)$ et on veut une valeur approchée de $f(x_0+h, y_0+k)$ où $f(x,y) = x^y = e^{x \ln y}$. Comme un calcul donne $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, on trouve que $(1,01)^{3,02} \simeq 1,03$.