CH3 – Calcul intégral

Plan du chapitre

Liste des techniques de base

T1. Comment trouver *les* primitives d'une fonction donnée ?

T2. Quelle méthode pour primitiver ?

T3. Comment effectuer une IPP, et que dériver dans une IPP ?

T4. Poser un changement de variables dans $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

T5. Linéariser $\cos^p(t)$ ou $\sin^p(t)$ $(p \in \mathbf{N}, p \geq 2)$

T6. Étudier une suite définie par une intégrale $u_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$

T7. Formules de dérivation d'une fonction définie par une intégrale

T8. Comment reconnaître une somme de Riemann ?

T9. Calculer de façon approcher une intégrale

1 Primitive

■ Définition 1 [Primitive]

Soit $f : I \to \mathbf{K}$. Une primitive de f **sur** I est une fonction F vérifiant 3 conditions :

1. F est définie sur I.
2. F est dérivable sur I.
3. $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$.

■ Théorème 1 .... [*Structure de l'ensemble des primitives sur un intervalle*]

Si I est un **intervalle** et si $f \in \mathscr{C}^0(I)$. Alors :

1. f admet une infinité de primitives sur I.
2. Elles se déduisent d'**une** primitive particulière de f sur I par addition d'une constante dans $\mathbf{K}$ arbitraire.

■ Remarque 1.

1. Toute primitive F de f dans ce cas vérifie $F' = f$ donc est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. On trouve **une** primitive particulière par les méthodes de primitivation.
3. Ne pas confondre primitive (fonction) et intégrale (scalaire).

■ Exemple 1.

Soit $\begin{array}{rcl} f & : & \mathbf{R}_+^\star \longrightarrow \mathbf{R} \\ & & x \mapsto \dfrac{1}{x^3} \end{array}$

■ Exemple 2.

Soit $I = \mathbf{R}^\star$. On considère la fonction nulle notée $\mathbf{0}$. On considère aussi les deux fonctions F et G définies par :
2025

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Tracer les courbes des fonctions F et G.
2. Vérifier que F et G sont des primitives de $\mathbf{0}$ sur I.
3. Est-ce que la fonction $F - G$ est constante ? Conclure.

■ Remarque 2.

Définition de fonction constante sur un ensemble E et de fonction non constante.

2 Méthodes de primitivation

T1 **Comment trouver *les* primitives d'une fonction donnée ?**

Pour trouver toutes les primitives d'une fonction f donnée : on se place sur un intervalle I on vérifie que la fonction f y est continue. On calcule **une** primitive de f par les méthodes du II. On conclut en appliquant **Thm 1. 2.**

A) Tableau des primitives usuelles

Fonction $f: I \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ $f(x) =$	Intervalle I	Primitive particulière
x^α $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+$	$\frac{2}{3} x \sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\ln \lvert x \rvert$
$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$	$\sqrt{x}$
e^{mx} $m \in \mathbf{C}^*$	$\mathbf{R}$	$\frac{1}{m} e^{mx}$
$\cos mx$ $m \in \mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}$	$\frac{1}{m} \sin mx$
$\sin mx$ $m \in \mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}$	$-\frac{1}{m} \cos mx$
$\frac{1}{x^2+1}$,	$\mathbf{R}$	$\arctan x$

B) Primitivation à vue

Fonction $f: I \to \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ $f(x) =$	$u \in \mathscr{C}^0, u(x) \in$	Primitive particulière
$u(x)^\alpha \times u'(x)$ $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\in]0, +\infty[$	$\frac{1}{\alpha+1} u(x)^{\alpha+1}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\ln \lvert u(x) \rvert$
$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\frac{1}{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\mathbf{R}_+^*$	$\sqrt{u(x)}$
$u'(x) \times e^{u(x)}$	$\mathbf{R}$	$e^{u(x)}$
$\cos u(x) \times u'(x)$	$\mathbf{R}$	$\sin u(x)$
$\sin u(x) \times u'(x)$	$\mathbf{R}$	$-\cos u(x)$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\mathbf{R}$	$\arctan u(x)$

T$_2$ **Quelle méthode pour primitiver ?**

1. On essaie de primitiver «à vue» :

   a) On reconnaît une primitive usuelle **tableau A**

   b) On reconnaît la dérivée d'une composée **tableau B**

2. Changement de variables pour se ramener à **1** ou , ou évetuellement **3**.

3. Intégration par parties (devrait être indiqué en dehors des cas évidents).

■ Exercice 1.

Déterminer sur les ensembles donnés suivants les primitives des fonctions définies par :

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbf{R}_+^\star$.

2. $g(x) = \tan x$ sur $\left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$

C) Intégration par parties

■ Théorème 2 .... [*Intégration par parties*]

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

T$_3$ **Comment effectuer une IPP, et que dériver dans une IPP ?**

1. Le but de l'IPP est de troquer une intégrale du type $\int f \times g$ par une intégrale $\int h$ qu'on peut calculer par T$_2$.

2. Ensuite Il faut choisir dans la formule du théorème 2, quelle fonction, de f et g, joue le rôle de u, c'est-à-dire quelle fonction est à dériver. Prioritairement :

   L og

   P olynômes

   E xponentielles

   T rigo

3. Enfin quand on rédige on écrit :

4. «on considère $u \mapsto \dots$, et $v : t \mapsto \dots$». Surtout pas :«on pose $v' =$»

5. on n'oublie pas de préciser : «Les fonctions u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$»

■ Exemple 3.

Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 te^t\mathrm{d}t$.

■ Exercice 2.

Calculer par intégration par parties $L = \int_1^e x \ln x \mathrm{d}x$.

D) Changement de variables

■ Théorème 3 .... [*Reparamétrage*]
Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$, F est une primitve de F sur $[a,b]$ et φ une fonction continue à valeurs dans $[a,b]$:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\mathrm{d}t = [F(\varphi(t))]_a^b.$$

■ Remarque 3.

Dans cette forme du théorème, il n'est pas nécessaire que φ soit bijective : ce n'est pas un changement de variable.

■ Exemple 4.

Calculer $K = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$

Il est **impératif** de savoir effectuer un changement de variables

T4 **Poser un changement de variables dans $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$**

1. Changer de variable : t devient u. Si on pose $t = \dots$, on a un vrai changement de variables, et on doit préciser que la fonction u de la variable t est bijective de classe $\mathscr{C}^1$. Si on arrive à tout exprimer dans l'intégrale sans avoir à passer par $t = \dots$, c'est simplement une primitivation à vue.
2. Calculer $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ d'ou $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}u$.
3. Remplacer t par son expression en fonction de u
4. Remplacer $\mathrm{d}t$ en fonction de u et du. (C'est là que $\mathscr{C}^1$ intervient).
5. Remplacer les bornes. (C'est là que la bijectivité intervient)

■ Exemple 5.

Calculer $L = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$. On posera le changement de variables $t = \cos u$.

T5

Linéariser $\cos^p(t)$ **ou** $\sin^p(t)$ $(p \in \mathbf{N}, p \geq 2)$

1. Partir de la formule d'Euler : $2\cos t = \underbrace{e^{it} + e^{-it}}_{C}$ ou $2i \sin t = \underbrace{e^{it} - e^{-it}}_{S}$.
2. Appliquer la formule du binôme à C^p (ou S^p) : le développement commence toujours par e^{ipt}. S'appuyer ensuite sur le triangle de Pascal, et observer la «décroissance de la phase[a] par pas de 2» dans la séquence des termes du développement :

$$C^p = (e^{it} + e^{it})^p = 1e^{ipt} + pe^{i(p-2)t} + \binom{p}{2} e^{i(p-4)t} + \binom{p}{3} e^{i(p-6)t} + \dots$$

   Ne pas oublier l'**alternance du signe dans le développement** dans le cas du **sinus** :

$$S^p = (e^{it} - e^{-it})^p = 1e^{ipt} - pe^{i(p-2)t} + \binom{p}{2} e^{i(p-4)t} - \binom{p}{3} e^{i(p-6)t} + \dots$$

3. Regrouper dans le développement par conjugués par les extrémités (le premier avec le dernier, le 2ème avec l'avant-dernier,*etc.*).
4. Finir par la formule d'Euler 1. utilisée en sens inverse : les éventuels i se simplifient dans (dans le cas de S^p), puisque S est imaginaire pur !
5. Contrôler la plausibilité du résultat avec la parité de la fonction (p.ex le développement de $\sin^{2m}(t)$ doit être en somme de cosinus, et pas de sinus car $2m$ est pair !)

a. Dans e^{it}, t réel, t s'appelle la phase.

■ **Théorème 4** .... [*Conséquences du changement de variables*]

Si I est supposé symétrique par rapport à 0, et $a \in I0$:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} 2\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si} f \text{ est paire} \\ 0 & \text{si} f \text{ est impaire.} \end{array} \right.$$

Si f est T-périodique sur I

1. Si $[a, b] \subset I$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Si $a \in I$, on a : $\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$

3 Intégrale de $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$

A) Définition

■ **Définition 2** [Intégrale sur un segment d'une fonction continue]

L'intégrale de $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ est par définition le nombre $Z = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Par primitivation, il vaut donc $Z = F(b) - F(a)$ où F est *n'importe quelle* primitive de f sur $[a,b]$.

■ **Remarque 4.**

1. Le calcul de $Z = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ donnera toujours le même résultat pour Z, même si on choisit une autre primitive en vertu du **Théorème 1**).
2. **a)** On ne peut parler de ce genre d'intégrale que pour des fonctions continues sur le segment $[a,b]$, ou alors pour des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

   b) Sinon, c'est que soit Z n'a aucun sens, soit il est à comprendre comme une intégrale **impropre** (chapitre 11).
3. Dans la notation intégrale Z, la variable t est *muette*. En particulier ☠, la valeur de Z **ne dépend jamais de** t.

B) Propritétés de l'intégrale

■ Théorème 5 .... [*Propriétés*]

Si f,g sont deux fonctions $\mathscr{C}^0([a,b])$ et si λ et μ ,c sont trois constantes :

1. $\displaystyle\int_a^b 0\mathrm{d}t = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t := \int_a^b 1\mathrm{d}t = b-a$
3. (Chasles) $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$
4. (Linéarité)

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f + \mu g &= \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \\ &+ \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

5. (Positivité) Si f est positive sur $[a,b]$ et $a \le b$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \ge 0$
6. (Croissance) Si $f(t) \le g(t)$ pour $t \in [a,b]$ et $a \le b$:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \le \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

7. (Inégalité triangulaire). Si $a \le b$:

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

8. Si f est positive et continue sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$$

T6 **Étudier une suite définie par une intégrale $u_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$**

1. **Relation de récurrence.** Dans quasiment tous les cas, une relation de récurrence s'obtient en effectuant une intégration par parties.
2. **Monotonie.** En général, on compare les intégrandes $f_{n+1}(t)$ et $f_n(t)$ sur $[a,b]$ et on conclut sur la monotonie par croissance de l'intérgale.
3. **Prouver que $u_n \to 0$.** On peut tenter de majorer $f_n(t)$ sur $[a,b]$ par une fonction qu'on sait primitiver et utiliser la croissance de l'inétgrale : on arrive à $0\ leu_n \le \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \to 0$, et on conclut par le théorème des gendarmes.

■ Exercice 3.

4 Fonctions définies par une intégrale

A) Données

1. $f \in \mathscr{C}^0(I)$, I est un intervalle, et u, v sont deux fonctions à valeurs dans I.
2. Φ est une fonction définie par :

$$\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

B) Existence du nombre $\Phi(x)$

■ Théorème 6 .... [*Condition **suffisante** d'existence du nombre $\Phi(x)$*]

Si le segment d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$ est contenu dans un **intervalle de continuité** de f, alors *le nombre* $\Phi(x)$ existe
en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue. Autrement dit dans ce cas, $x \in \mathscr{D}_\Phi$.

■ Exemple 6.

Donner le domaine de la fonction $\begin{array}{rcl} \Phi & : & \mathscr{D}_\Phi \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{1+x^2}^{e^x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t \end{array}$.

■ Exercice 4.

Même question avec $\begin{array}{rcl} \Phi & : & \mathscr{D}_\Phi \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{x}^{3x^2} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t \end{array}$.

C) Dérivabilité de la fonction Φ

■ Théorème 7 .... [*Dérivabilité et calcul*]

1. Si les fonctions u et v sont dérivables et à valeurs dans un intervalle de continuité J de f alors Φ est dérivable en tout point de I.
2. De plus, en notant F une primitive de f sur J :
   a) $\Phi(x) = [F(t)]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$.
   b) $\Phi = F \circ v - F \circ u$ est dérivable et donc :
   $$\Phi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$
3. En particulier, si u et v sont $\mathscr{C}^1$, Φ aussi.

■ Théorème 8 .... [*Cas particulier*]
Si $f \in \mathscr{C}^0(I)$, et $\bullet$ un réel quelconque dans I, alors :

1. $F : x \mapsto \int_\bullet^x f(t)\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1(I)$.
2. $\forall x \in I \; F'(x) = f(x)$ ☠

T7 **Formules de dérivation d'une fonction définie par une intégrale**

1. Si a est une constante : $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x)$.

2. Si u, v sont des fonctions : $\left(\displaystyle\int_u^v f(t)\mathrm{d}t\right)' = u'(x) \times f(u(x)) - v'(x) \times f(v(x))$.

■ **Exemple 7.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 \leqslant t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et soit F la fonction définie par $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F, noté $\mathscr{D}_F$.
2. Calculer explicitement $F(x)$ pour x élément de $\mathscr{D}_F$.
3. Soit $x \in \mathscr{D}_F$. La fonction F est-elle dérivable au point x ? Si oui, calculer $F'(x)$.
4. Représenter F graphiquement.

5 Théorème de la moyenne

A) Énoncé

■ **Théorème 9** .... [*théorème de la moyenne*]

1. Si $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et si on pose :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

alors (A_n) converge vers $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

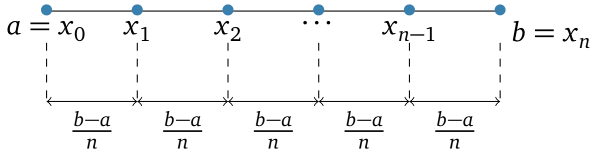
2. Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ et si on pose :

$$A_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\underbrace{a + \frac{k(b-a)}{n}}_{x_k}\right)$$

alors (A_n) converge vers $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

■ **Remarque 5.**

1. Le point **b.** est une généralisation de **a.** puisqu'on obtient **a.** en appliquant **b.** avec $a = 0$ et $b = 1$.
2. Le nombre A_n est la moyenne des valeurs de f prises sur les n points régulièrement répartis dans $[a, b[$ que sont $x_0, \ldots, x_{n-1}$:



$$A_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})}{n}$$

B) Somme de Riemann

■ Définition 3 [Somme de Riemann]

Le nombre A_n du théorème précédent s'appelle somme de Riemann de f sur le segment $[a, b]$.

■ Remarque 6.
Le théorème de la moyenne affirme que les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f.

T8 **Comment reconnaître une somme de Riemann ?**

1. Mettre $\frac{1}{n}$ en facteur de la somme.
2. Ce qui reste sous la somme ne doit dépendre que de $\frac{k}{n}$ (dit autrement, l'expression sous la somme doit être homogène en k et n)
3. On a une somme de Riemann si et seulement si le point **2.** est vérifié.

■ Exemple 8.
Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ $(n \geq 1)$ et calculer le cas échéant sa limite.

T9 **Calculer de façon approcher une intégrale**

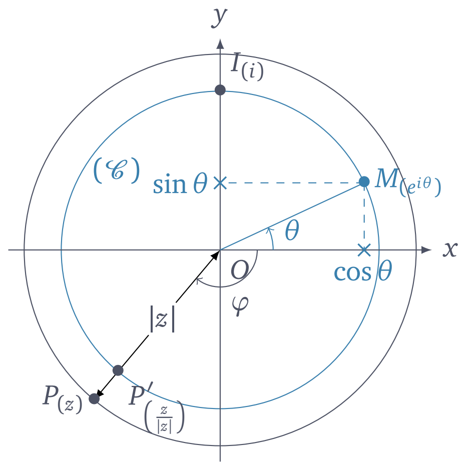
Le théorème de la moyenne permet de calculer de manière approchée la valeur d'une intégrale classique en remplaçant son calcul par la somme de Riemann correspondante pour une nombre n de rectangles assez grand.

■ Exemple 9.

Soit $x > 0$, et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{x + t} \mathrm{d}t$.

```python
g = lambda x,t : cos(t)/(x+t)
n,S = 100,0
for k in range(n):
    S+=g(k/n)/n
```

■ Exemple 10.
Écrire une fonction en Python prenant en entrée un entier n et donnant en sortie une valeur approchée de π à l'aide la suite (u_n) de l'exemple précédent.



y
I(i)
(𝒞)
sin θ
M(e^{iθ})
θ
x
O
cos θ
φ
|z|
P(z)
P′(z/|z|)