CH3bis – Équations différentielles (ED)

Plan du chapitre

Liste des définitions

Liste des techniques de base

1 Solution d'une équation différentielle

■ Définition 1 .... [Solution d'une équation différentielle]
Soit (E) est une équation différentielle d'ordre p sur un intervalle ouvert I non vide :

$$(E) \qquad y^{(p)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(p-1)})$$

1. on appelle solution de (E) toute fonction y vérifiant les conditions suivantes :

a) y est définie sur I.

b) y est p fois dérivable sur I.

c) En tout point t de I, y vérifie la relation (E) :

$$\forall t \in I \quad y^{(p)}(t) = F\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p-1)}(t)\big)$$

2. Résoudre (E), c'est donner toutes les solutions de (E).

■ Remarque 1.
Souvent pour nous, $p = 1$, ou $p = 2$.

■ Exemple 1.
Définition de solution de $xy' - 2y^2 = x$ sur $\mathbf{R}$.

2 Résultats généraux sur les équations différentielles linéaires (EDL)

A) Théorème de structure

■ Théorème 1 .... [*Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL*]
Les solutions d'une équation différentielle **linéaire** s'obtiennent en ajoutant à **une** solution particulière y_p **n'importe quelle** solution de l'équation homogène associée.

B) Principe de superposition ou linéarité de l'équation

■ Théorème 2 .... [*Linéarité*]
Si y_1 et y_2 sont deux fonctions,et λ un scalaire alors :

1. $(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = (y_1' + ay_1) + (y_2' + ay_2)$

2. $(\lambda y)' = \lambda y_1'$

3. $(\overline{y_1})' = \overline{y_1'}$. En particulier avec ce qui précède :

a) $\mathfrak{Re}\left(y_1'\right) = (\mathfrak{Re}\, y_1)'$

b) $\mathfrak{Im}\left(y_1'\right) = (\mathfrak{Im}\, y_1)'$

Les mêmes relations sont vraies avec les dérivées secondes, ou de tout ordre $p \geq 2$.

■ Remarque 2.
Particulièrement utile pour simplifier la recherche de solutions particulières à des équations linéaires.

■ Exemple 2.
Trouver une solution particulière sur $\mathbf{R}$ à :

$$(E) \qquad y' + y = 2 + 7\cos t$$

CC BY-NC-SA

3 Équations linéaires du premier ordre (EDL$_1$)

A) Forme normalisée

■ Définition 2 .... [Forme normalisée d'une EDL$_1$; coefficients ; 2nd membre]

$$\text{Sur}\quad I\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{normalisé}}}{y'} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{coefficient}}}{a}\, y = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2d membre}}}{b} \qquad (E_1)$$

■ Remarque 3.

1. Ici, a et b sont *a priori* des fonctions, pas forcément des constantes.
2. La variable des fonctions en jeu dans (E_1) est sous-entendue dans la notation.
3. ☠ La normalisation d'une équation différentielle (E) donnée implique la division par le coefficient de y'. Or, celui-ci pourrait s'annuler sur I : dans ce cas, l'équation normalisée (E_1) obtenue par divison **n'est plus équivalente à l'équation de départ**. Il faudra alors résoudre (E) sur des sous-intervalles $I_1, \ldots$ sur lesquels elle est équivalente à (E_1), **puis** analyser comment obtenir des solutions sur I de (E) à partir des solutions calculées sur $I_1, \ldots$. Il faut pour cela partir de la **déf. 1**.

■ Définition 3 .... [Équation homgène asociée à une EDL$_1$]

L'équation homogène associée à (E_1) est :

$$\text{Sur}\quad I\quad y' + ay = 0 \quad (H_1)$$

B) Résolution

■ Théorème 3 .... [*Solutions de $y' + ay = b$ avec a et b constants*]

Si a, b sont des fonctions constantes ,l'équation $y' + ay = b$ a une infinité de solutions. Ce sont les solutions y données sur I par :

1. Si $a \neq 0$:
$$y(t) = \frac{b}{a} + ke^{-at} \quad k \quad \text{réel arbitraire}$$
Le réel k est déterminé par la donné d'une condition initiale du type $y(t_0) = y_0$
2. Si $a = 0$: Les primitives de b sur I.

■ Remarque 4.

Ainsi, la recherche de primitive apparaît comme un cas particulier d'équation différentielle du premier ordre.

■ Remarque 5.

Dans le cas où la condition initiale est donnée à l'abscisse t_0, il est plus adapté d'écrire les solutions générales sous la forme :

$$y(t) = \frac{b}{a} + ke^{-a(t-t_0)} \quad k \quad \text{réel arbitraire}$$

■ Théorème 4 ....[*non constant homogène $y' + ay = 0$*]

L'équation (H) possède une infinité de solutions paramétrées par la variable libre $k \in \mathbf{R}$. Ce sont les fonctions définies sur I par :

$$z_k : t \mapsto ke^{-A(t)}$$

où A est n'importe quelle primitive de la fonction a sur I.

■ Remarque 6.

1. Le choix de la primitive de la fonction a n'a aucune incidence dans l'expression des fonctions z_k.
2. ☠ Attention au signe $-$ devant l'intégrale (alors qu'il y a un $+$ dans (H)).

(cc) BY NC SA

■ Exemple 3.

Résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star$ $\quad xy'+y=0$.

■ Exemple 4.

Résoudre sur $\mathbf{R}$ $\quad xy'+y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

■ Théorème 5 ....[*Non constant non homogène*]
Les solutions sur I de (E) sont les fonctions y données par :

$$y(t)=y_p(t)+z_k(t)$$

où z_k désigne n'importe quelle solution de (H) et y_p une solution particulière de (E). Cette dernière peut toujours s'obtenir en appliquant la méthode de la *variation de la constante*.

■ Exemple 5.

Résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star$ $\quad xy'+y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

T_1 Comment résoudre une équation linéaire EDL normalisée ?

1. D'abord on identifie précisément le type d'EDL (homogène ? coeffs constants ?)
2. On cite *toujours* le **théorème 1** avant de résoudre.
3. **a) Résolution de l'équation homogène associée.** Il s'agit simplement d'appliquer une formule adaptée suivant que :
   - **i)** EDL_1 : **thm.3** (coeffs constants), sinon **thm. 4**.
   - **ii)** EDL_2 : Coefficients constants → méthode de l'équation caractéristique **thm. 6**,Sinon : vous serez guidés.

   b) Recherche d'une solution particulière.
   - **i)** Le *principe de superposition* (**thm 2.** permet de décomposer le second membre pour faciliter la construction d'une solution particulière.
   - **ii)** EDL_1 : la variation de la constante marche toujours (**thm.**), mais pas nécessaire.
   - **iii)** EDL_2 : indications données.
4. Conclure en donnant l'ensemble des solutions décrit en **2.**

CC BY NC SA

T₂ **Méthode de variation de la constante**

Elle ne sert *qu'à* trouver une solution particulière d'une EDL_1 connaissant les solutions de l'équation homogène associée. En pratique (avec les notations de **3A)-B)** :

1. Après avoir résolu (H_1) par **thm4.**, on obtient l'expression de z_k.
2. On sélectionne la fonction z_1 obtenue en **1.** (faire $k=1$ dans z_k), puis :
   a) on cherche une solution particulière y_p sous la forme $y_p(t)=k(t)\times z_1(t)$ où k est cette fois une *fonction* inconnue, et trouver y_p revient à déterminer la fonction k.
   b) On n'oublie pas que $z'+az_1=0 \quad (\star)$
3. En injectant y_p dans (E_1), **on arrive toujours**, en utilisant $(\star)$, à la relation $k'z_1=b$, d'où $k'=b/z_1$ et il reste à primitiver k' pour obtenir k, ce qui nous donne $y_p=kz_1$.

4 Équations linéaires du second ordre (EDL2) à coefficients constants

A) Forme normalisée d'une EDL_2

■ Définition 4 .... [Forme normalisée d'une EDL_2 ; coefficients ; 2nd membre]

$$\text{Sur } I \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{normalisé}}}{y''} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{coefficient}}}{a}\, y' \; \underset{\substack{\uparrow\\ \text{coefficient}}}{b}\, y = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2d membre}}}{c} \qquad (E_2)$$

■ Définition 5 .... [Équation homgène asociée à une une EDL_2]

L'équation homogène associée à (E_2) est :

$$\text{Sur} \quad I \quad y''+ay'+by=0 \quad (H_2)$$

■ Définition 6 ... [Équation caractéristique associée à une EDL_2 à coefficients constants]

C'est l'équation du second degré d'inconnue complexe m :

$$(E_C) \quad m^2+am+b=0$$

On note $\Delta=a^2-4b$ son discriminant.

■ Remarque 7.

1. Attention à ne pas se tromper dans la confection de (E_C) quand b ou a est nul.
2. Il n'existe pas d'équation caractéristique si l'équation n'est pas à coefficients constants.

CC BY-NC-SA

B) Résolution

■ Théorème 6 .... [*Cas homogène*]
L'équation (H) possède une infinité de solutions. En notant Δ le discriminant de son équation caractéristique, ce sont les fonctions définies sur I par :

1. Si $\Delta > 0$:
$$y(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t},$$
m_1 et m_2 étant les deux racines réelles de (E_C).
2. Si $\Delta = 0$:
$$y(t) = (At + B)e^{m_0 t},$$
où m_0 est la racine double rélle de (E_C).
3. Si $\Delta < 0$:
$$y(t) = e^{rt}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right),$$
où $m = r + i\omega$ est la racine de partie imaginaire positive de (E_c).

Dans les trois cas, les constantes A, B sont réelles quelconques (deux variables libres), elles sont déterminées de façon unique dès lors que l'on fixe un système de conditions initiales du type
$$y(t_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = y_1$$

C) Prinicipe de superposition

■ Théorème 7 .... [*Principe de superposition*]

Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions sur l'intervalle I respectivement des équations :
$(E_1) \quad y'' + ay' + by = c_1$ $(E_2) \quad y'' + ay' + by = c_2$. (même équations mais second membres différents).Alors :

1. $y_p = y_1 + y_2$ est une solution sur I de l'équation : $(E) \quad y'' + ay' + by = c_1 + c_2$
2. Pour tout scalaire λ, $y_p = \lambda y_1$ est solution sur I de : $(E) \quad y'' + ay' + by = \lambda c_1$
3. $y_p = \mathfrak{Re}(y_1)$ est solution sur I de : $(E) \quad y'' + ay' + by = \mathfrak{Re}(c_1)$
4. $y_p = \mathfrak{Im}(y_1)$ est solution sur I de : $(E) \quad y'' + ay' + by = \mathfrak{Im}(c_1)$

■ Remarque 8.

1. C'est une conséquence immédiate du `Thm 2`.
2. En pratique, on se sert de ce théorème pour atomiser la recherche de solutions particulières.

5 Équations différentielles non linéaires

A) Premier ordre autonome

■ Définition 7 .... `[Équation différentielle autonome ; forme normalisée]`
Ce sont les équations de la forme :
$$(E) \qquad y' = F(y)$$
La dérivée de l'inconnue ne s'exprime qu'en fonction de l'inconnue et pas de la variable.

■ Remarque 9.
Les modèles malthusien, logisitque et de Gompertz entrent dans cette catégorie.

CC BY-NC-SA

T3 **Comment résoudre une ED autonome ?**

1. Il n'y a pas de théorie générale sur la résolution.
2. Sous des hypothèses de travail qui seront précisées par l'énoncé. la résolution de ces équations se réduit à une question de primitivation. En général la première étape, dite *recherche de conditions nécessaires*, consiste à supposer qu'il existe un intervalle I sur lequel est définie une solution y, et de la calcul par primitivation à vue de la relation $\forall t \in I \quad \dfrac{y'(t)}{F(y(t))} = 1$ (cette division par $F(y)$ impose des conditions sur l'intervalle I, et la solution y) Ne pas oublier la constante d'intégration C.
3. La deuxième étape consiste en la *recherche de conditions suffisantes* sur les solutions : on utilise l'expression des solutions calculées précédemment et on filtre les I et C à retenir pour avoir une solution de (E) Le calcul de y par le calcul précédent

■ **Exercice 1.**
Montrer que si y est une solution de $y' = F(y)$ sur un intervalle $I =]a, b[$, alors pour tout réel φ la fonction y_φ définie sur $I_\varphi =]\varphi + a, \varphi + b[$ par $y_\varphi(t) = y(t - \varphi)$ est solution sur I_φ

B) Équations non linéaires quelconques

L'équation est du premier ordre et pas forcément autonome, avec une condition initiale :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & F(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

Des méthodes seront données dans les sujets.

Traitement numérique par le schéma d'Euler

Un traitement numérique (donc une résolution) approchée est toujours possible notamment par la *méthode d'Euler*. La méthode d'Euler s'appuie sur l'approximation de la dérivée par un taux d'accroissement.

Données. Un point de départ $t_0 \in I$ et un point $T \in I$. On veut calculer une solution approchée de la solution y de (S) sur $J = [t_0, T]$

Principe de la méthode d'Euler

1. On **renonce à calculer** la solution approchée **en tout point de** J, mais on sélectionne des points régulièrement répartis sur J : $t_0, \dots, t_n$ (l'idée étant bien sûr de prendre n grand).
2. on cherche à calculer **seulement** des valeurs approchées y_k de la solution exacte y aux points t_k : $y_k \simeq y(t_k)$
3. On part de t_k avec $k = 0$.
4. On dit que puisque $y_k \simeq y(t_k)$, alors d'après (S) : $y'(t_k) \simeq F(t_k, y_k)$, ce qui donne une approximation de la pente de la tangente à la courbe de la solution exacte y à l'abscisse t_k.
5. On considère que sur $[t_k, t_{k+1}]$, y se comporte comme sa tangente au point d'abscisse t_k, ce qui donne une valeur approchée de $y(t_{k+1})$: on a obtenu une valeur pour y_{k+1}.
6. On reprend de l'étape **3.** avec cette fois $k \to k+1$
7. Par récurrence,on a calculé $y_0, \dots, y_n$. Par définition y_n est une valeur approchée de $y(T)$.

T4 **Comment obtenir le schéma d'Euler d'une ED ?**

Il suffit d'appliquer les règles de substitution suivantes pour obtenir le schéma d'Euler associé au problème (S). On dit alors que l'on a *discrétisé* l'équation différentielle :

ED	version discrétisée
t	t_k
$y(t)$	y_k
$\mathrm{d}y$	$y_{k+1}-y_k$
$\mathrm{d}t$	$h=t_{k+1}-t_k$
$y'(t)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$	$\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h}$
$F(t,y)$	$F(t_k,y_k)$
$y(t_0)=y_0$	y_0

La version discrétisée de l'ED est une relation de récurrence des termes d'une suite, ces derniers se calculant facilement programmatiquement.

Exemple 6.
Soit $r>0$. Considère l'équation de Malthus :

$$y'=ry, \quad y(0) \quad \text{donné.}$$

1. Compléter le schéma d'Euler associé à cette équation pour un pas $h>0$ donné ci-dessous :

$$(\mathrm{Eu}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_{k+1} & = & \\ y_0 & = & y(0) \end{array} \right.$$

2. On fixe $T>0$ et on souhaite calculer une valeur approchée $y(T)$ de la solution de (S) à la date T. Pour cela, on fixe un entier $n>0$, et un réel $h>0$ de sorte que $T=nh$. On applique ensuite un schéma d'Euler pour résoudre de façon approchée l'équation de Malthus sur $[0,T]$.
   - **a)** Résoudre explicitement (Eu). Donner alors l'expression de y_n en fonction de $y(0),r,h,T$.
   - **b)** De quoi y_n est-il une valeur approchée par définition du schéma d'Euler ?
   - **c)** Soit $\lambda\in\mathbf{R}^\star$. Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\lambda}{x}\right)^x$.
   - **d)** En déduire la valeur de y_n lorsque $h\to 0^+$.
   - **e)** Que dire par rapport à la solution exacte du modèle malthusien ?
3. Représenter sous `Python` la solution exacte et la solution approchée sur $I=[0,T]$ pour les donnée suivantes : $T=5, y(0)=1, r=3, h=10^{-2}$.

C) Programmation en `Python` du schéma d'Euler

T5 **Programmer en python un schéma d'Euler**

En exemple, le code pour trouver une solution approchée sur $I=[1;2]$ de l'équation :

$$(S)\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & \dfrac{y}{t^2} \\ y(1) & = & 2 \end{array} \right.$$

CC BY NC SA

■ Exercice 2.
Donner la fonction F telle que $y' = F(t, y)$ et le schéma d'Euler associé à (S).

```
1  import matplotlib.pyplot as plt
2  def F (t,y) :
3      return y/t**2
4  t0,T = 1,2              #L'intervalle
5  n = 10                  #Nb de pts de subdiv.
6  h = (T-t0)/n            #Pas de la subdiv.
7  y0 = 2                  #Condition initiale
8  Lt,Ly = [t0],[y0]
9  for k in range(n):
10     t,y =Lt[-1], Ly[-1]
11     y+=h*F(t,y)         #Le yk suivant
12     t+=h*1              #Le tk suivant
13     Lt.append(t)
14     Ly.append(y)
```

■ Remarque 10.
Lignes 10-11 : actualiser `y` (c'est-à-dire calculer y_{k+1}) **avant** d'actualiser `t`, puisque t_k intervient dans le le calcul de y_{k+1} !