CH4 – Suites numériques réelles

Plan du chapitre

Liste des définitions

Liste des techniques de base

1 Vocabulaire courant

A) Voisinage

■ Définition 1 .... [Ensemble $\overline{\mathbf{R}}$, voisinage de $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$]

1. On pose : $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
2. Voisinage de $+\infty$: tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$ ($a \in \mathbf{R}$).
3. Voisinage de $-\infty$: tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ ($a \in \mathbf{R}$).
4. Voisinage de $\ell \in \mathbf{R}$: tout intervalle de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$.

B) Nature d'une suite

■ Définition 2 .... [Nature d'une suite, monotonie d'une suite]

1. Nature d'une suite : convergente ou divergente.
2. Monotonie d'une suite : croissante ou décroissante ou ni l'une ni l'autre.

C) Propriété asymptotique

■ Définition 3 .... [Propriété vraie à partir d'un certain rang/asymptotiquement]
Soit (P_n) une propriété dépendant d'un entier n. La propriété (P_n) est asymptotique, ou aymptotiquement vraie, ou locale, ou encore presque toujours vraie, si elle vraie pour tout entier n sauf au plus un nombre fini d'entre eux.

■ Remarque 1.
La plupart des théorèmes qui suivent demandent des conditions vraies seulement asymptotiquement. Si la propriété est vérifiée à tout rang n, elle est dite globale.

2 Bornitude

■ Définition 4 .... [Suite majorée/minorée/bornée]
On dit qu'une suite (u_n) est :

1. majorée si pour un réel M indépendant de n : $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq M$
2. majorée si pour un réel m indépendant de n : $\forall n \in \mathbf{N} \quad m \leq u_n$
3. Bornée si (u_n) est à la fois majorée est minorée :

$$\exists m \in \mathbf{R} \quad \exists M \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad m \leq u_n \leq M.$$

■ Remarque 2.

1. ☠ Le majorant, minorant, d'une suite ne peut dépendre de la valeur des termes de cette dernière.
2. (u_n) est bornée $\Longleftrightarrow$ $(|u_n|)$ est majorée : les problèmes de bornation se réduisent donc à des problèmes de majoration.
3. Toute suite convergente est bornée.

■ Exemple 1.
$\forall n \quad u_n \geq 2 + \dfrac{1}{n}$

T1 **Comment majorer une expression ?**

1. Pour borner une expression $f(v)$, on majore $|f(v)|$.
2. Pour majorer une somme, on majore en valeur absolue chaque terme par l'inégalité triangulaire : $\left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k|$
3. Pour majorer un produit de termes positifs, on majore chacun des facteurs.$\left|\prod a_k\right| \leq \prod |a_k|$
4. Pour majorer un quotient de nombres positifs, on **majore** le numérateur et on **minore** le dénominateur.
5. Pour des expressions plus compliquées, des arguments de monotonie ou des études de fonctions (recherche d'extrema) sont à envisager.,
6. Pour des intégrales, penser à l'inégalité triangulaire $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ $(a \leq b)$, et la croissance de l'intégrale ou

■ Théorème 1 .... [*caractère asymptotique*]

Si $\bullet \in \{\text{majorée,minorée,bornée}\}$, une suite asymptotiquement $\bullet$ est $\bullet$, puisque tout ensemble fini est $\bullet$, et la réunion de deux ensembles $\bullet$ est $\bullet$.

■ Exercice 1.

Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{7-2n}{n+3}$ est bornée.

3 Convergence

A) Limite

■ Définition 5 .... [Suite convergente]

(u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff$ tout voisinage de ℓ contient $\underbrace{\text{presque tous}}_{\text{Déf.1}}$ les termes de la suite.

■ Remarque 3.

1. La limite est unique.
2. La notion de convergence est locale. En particulier, il revient au même d'étudier la convergence de la suite (u_n) ou d'une suite tronquée (u_{n+1}), (u_{n+2}), *etc.* : elles sont de même nature et en cas de convergence, elles ont toutes même limite.

B) Suites adjacentes

■ Définition 6 .... [Suites adjacentes]

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

1. l'une est croissante,
2. l'autre décroissante
3. $u_n - v_n = o(1)$.

■ Théorème 2 .... [*des suites adjacnentes*]
Deux suites adjacentes sont toujours convergentes dans $\mathbf{R}$ et de même limite.

C) Suites extraites

■ Théorème 3 .... [*théorème (u_{2n}) ou des suites extraites*]
Soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Sont équivalents

1. (u_n) converge vers ℓ.
2. **a)** (u_{2n}) converge dans $\overline{\mathbf{R}}$.
   b) (u_{2n+1}) converge dans $\overline{\mathbf{R}}$.
   c) Leurs limites valent toutes deux ℓ.

■ Remarque 4.
Par négation, (u_n) ne peut converger dès lors qu'une des conditions **a)**,**b)**,**c)** n'est pas vérifiée.

T₂ **Quand utiliser le théorème des suites extraites ?**

Il fournit un critère de divergence par négation de l'équivalence.
Il fournit aussi un critère de convergence si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes puisque dans ce cas les conditions **a)**,**b)**,**c)** de **2.** sont vraies.

■ Exercice 2.
Soit $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

1. Écrire sous forme de somme développée, et sans les calculer, les sommes $S_0, \dots, S_4$.
2. Étudier la monotonie de (S_{2n}) et de (S_{2n+1})
3. Nature de la suite (S_n) ?

D) Minoration - Gendarmes

■ Théorème 4 .... [*minoration*]
Si $u_n \geq v_n$ asymptotiquement alors $v_n \to +\infty \Rightarrow u_n \to +\infty$

☠ Ne pas confondre avec les gendarmes, dont la conclusion est la convergence de la suite !

■ Théorème 5 .... [*gendarmes*]

1. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ asymptotiquement et si (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.
2. Si $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ asymptotiquement et si $\varepsilon_n = o(1)$ alors (u_n) converge vers ℓ.

T3 **Comment obtenir un équivalent disposant d'un encadrement ?**

En général :

1. on part de la forme **1.** du théorème des gendarmes.
2. On estime par échelle de croissance le terme principal A_n de w_n qui est normalement aussi celui de v_n. Ainsi A_n est l'équivalent présumé.
3. On divise l'encadrement par A_n et on applique le théorème des gendarmes à u_n/A_n (vérifier la stricte positivité avant de diviser !)

Exemple 2.

1. Soit (u_n) une suite telle qu'asymptotiquement :

$$n-4+\ln(n^2+1) \leq u_n \leq n+3+\sqrt{n}.$$

Équivalent de u_n ?

2. Soit x un réel positif et pour tout entier $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Nature de (u_n) et limite le cas échéant.

T4 **Technique du millefeuille - encadrement de sommes**

1. Quand on a un encadrement du type :

$$(\star) \forall k \geq 0 \quad a_k \leq b_k \leq a_{k+1},$$

on a un millefeuille : une couche de a puis de b, et ainsi de suite. Il devrait donc être possible d'obtenir un encadrement des b_k à partir des a_j. C'est bien le cas, puisque d'après $(\star)$: $a_k \leq b_k$ et $a_k \geq b_{k-1}$. D'où :

$$\forall n \geq 1 \quad b_{n-1} \leq a_n \leq b_n.$$

Graphiquement, c'est évident :

$$a_0 \leq \boxed{b_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3 \leq \dots} \leq \dots$$

2. Quand on doit encadrer (ou majorer) la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$, on peut penser à un telescopage en sommant les relations de **1.** si b_k est une expression du type $b_k = v_{k+1} - v_k$.

E) Signe de la limite

Si $u_n \to \ell$, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}, \ell \neq 0$ alors (u_n) est asymptotiquement du signe de ℓ et non nul.

Remarque 5.
Sert à justifier que des suites sont asymptotiquement bien définies.

Exemple 3.
Si $u_n \to 3 > 0$, asymptotiquement, il est pertinent de parler de $\ln(u_n)$.

F) Convergence monotone

■ Théorème 6 .... [*convergence monotone*]
Si (u_n) est croissante, de deux choses l'une :

1. Ou bien (u_n) est majorée. Dans ce cas elle converge. Sa limite est son plus petit majorant.
2. Ou bien (u_n) est non bornée. Dans ce cas elle diverge vers $+\infty$.

☠ On voit souvent : «*(u_n) est croissante majorée par 2 donc (u_n) converge vers 2.*»

■ Exercice 3.
Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite donnée par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que (H_n) est croissante,
2. Montrer que : $\forall n \geq 1 \; H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire la nature de la suite (H_n) et donner sa limite éventuelle.

4 Passage à la limite dans les inégalités

■ Théorème 7 .... [*limite dans les inégalités*]

1. On peut passer à la limite dans une inégalité vraie asymptotiquement.
2. ☠ Celle dernière devient large à limite dans tous les cas, même si elle était stricte avant passage à la limite.

T5 **Comment passer à la limite dans une inégalité/égalité ?**

Avant de passer à la limite dans une relation (R_n) dépedant d'un entier n :

1. Vérifier qu'elle est vraie asymptotiquement.
2. ☠ Après avoir fait $n \to +\infty$ dans (R_n), **il ne peut plus rester de n dans la relation** (R) obtenue.
3. Si l' inégalité de départ est stricte, elle devient *large*

---

5 Équivalents

A) Formes indéterminées : mode d'emploi

$$☠ \quad \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^1, 0^\infty \ldots$$

■ Exemple 4.
le symbole 0^∞ signifie $u_n^{v_n}$ avec $u_n \to 0$ et $v_n \to \infty$. Comme $u_n^{v_n} = e^{u_n \ln v_n}$, ce qui est dans l'exponentielle est bien une forme indéterminée.

T6 **Commment calculer une limite ?**

Pour calculer une limite : on applique les opérations. Si on tombe sur une forme indéterminée, on lève l'indétermination en cherchant un équivalent.

■ Remarque 6.

En réalité, ces formes sont toutes des variantes de la première par composition avec $\exp/ln$.

B) Règles de calcul sur les équivalents

Les suites sont supposées non nulles asymptotiquement

■ Proposition 1 .... [Opérations sur les équivalents]

1. $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n$ et v_n sont asymptotiquement de même signe.
2. $\left\{\begin{array}{l} u_n \sim u_n' \\ v_n \sim v_n' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_n v_n \sim u_n' v_n' \\ \frac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{u_n'}{v_n'} \end{array}\right.$
3. Si $\alpha \in \mathbf{R}$ ne dépend pas de n et $u_n > 0$ asymptotiquement :
$u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$. En particulier : $u_n \sim v_n \Rightarrow \sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.
4. Si $u_n \to \ell$ et $\ell \neq 0$ alors $u_n \sim \ell$ et u_n est non nul asymptotiquement.

■ Remarque 7.

☠ Les équivalents ne passent pas aux sommes, ni aux $\ln, \exp$

☠ On n'écrit jamais $u_n \sim 0$

☠ On ne mélange pas dans une experession $\sim$ et $o(1)$.

T7

Comment calculer un équivalent d'une suite (u_n) ?

La technique est valable aussi pour les fonctions. On obtient un équivalent de u_n en :

1. d'abord en appliquant les opérations sur les limites :
   a) si on tombe sur une limite réelle ℓ **non nulle**, $u_n \sim \ell$.
   b) si on tombe sur une limite nulle (resp. infinie), (resp. une forme indéterminée) : on utilise l'échelle de croissance en 0, (resp. $\pm\infty$), (resp. on lève l'indétermination en analysant les termes pour débusquer celui qui est le plus haut sur l'échelle.)
2. atomisant l'expression en expressions $E_1, E_2 \dots$ compatibles avec les opérations (produits, quotients, puissances) pour simplifier.
3. analysant les termes figurant dans chaque expression $E_1, E_2 \dots$ et en factorisant par le terme le plus haut sur l'échelle de croissance.
4. Si l'analyse d'une expression E_1 est correcte, on a deviné son équivalent e_1, et on devrait arriver en utilisant l'échelle à $E_1 = e_1(1+o(1))$, ce qui permet de conclure, car c'est la définition de $E_1 \sim e_1$
5. Si l'échelle de croissance ne permet pas de conclure, ou si il y a des opérations non compatibles avec les équivalents telles que somme ou composition,il faut alors recourir à un équivalent usuel, et peut-être un développement limité.
6. Dans tous les cas, on repousse au maximum dans les calculs l'introduction de symbole $\sim$ qui passe mal aux opérations, et on essaie de travailler avec o en conservant l'information significative (qui ne peut être remarquée que par une analyse correcte des croissances comparées !).

■ Exercice 4.
Soit $u_n = \ln\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)$. Donner un équivalent simple de (u_n).

6 Étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Hors-programme, mais les techniques sont classiques

A) Questions...récurrentes

Q1. La suite est-elle bien définie ?

Q2. Est-elle monotone ?

Q3. Quelles sont ses limites possibles ?

Q4. Converge-t-elle ? Si oui, vers quoi ?

■ Exemple 5.

Étudier la suite récurrente (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{rrcl} & u_0 & = & -7 \\ \forall n \in \mathbf{N} & u_{n+1} & = & \sqrt{2-u_n} \end{array}\right.$

B) Pour se faire une idée

T8

Conjecturer la limite d'une suite récurrente ?

Une étude de la fonction f plus ou moins rapide pour obtenir le tracé de sa courbe représentative est bienvenue, ou une simulation en python.Une représentation graphique de C_f et des premiers termes de la suite par cobwebbing (introduire la première bissectrice) permet de conjecturer la nature de la suite.

■ Exemple 6.

Étudier la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} & u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbf{N} & u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n} \end{cases}$

■ Remarque 8.

On peut aussi court-circuiter cela par une simulation informatique. Ci-dessous, un script fabriquant la liste des termes $u_0, \ldots, u_n$ (on a pris ici $n = 10$, $u_0 = 1/2$, $f(x) = 2x(1-x)$) :

```python
def f(x):
    return 2*x(1-x)
u0,n  = 0.5,10
L =[u0]
for _ in range(n):
    L.append(f(L[-1]))
```

C) Méthodes de démonstration

■ Définition 7 .... [Intervalle stable pour une fonction f]

Intervalle I tel que $\forall x \in I \quad f(x) \in I$.

■ Définition 8 .... [Point fixe de f]

Toute solution x de l'équation

$$f(x) = x \tag{Fix}$$

T9

Comment trouver un intervalle stable de f ?

un intervalle (a, b) où a, b sont deux points fixes (finis ou infinis) consécutifs de f et sur lequel f est monotone est stable par f

D) Réponses aux questions de IV 1)

T10 **Montrer qu'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie**

1. Si la fonction f est définie sur $\mathbf{R}$, le calcul de $f(u_n)$ est possible, et ce, quelle que soit la valeur du réel u_n, donc tous les termes sont définis.
2. Sinon, l'énoncé a dû faire remarquer qu'un intervalle I sur lequel f est définie est stable. Dans ce cas, on montre, **toujours par récurrence**, que la suite est bien défnie, avec, comme hypothèse**s** de récurrence :
   A) le *nombre* u_n existe et **B)** $u_n \in I$

T11 **Monotonie d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$?**

1. En général, l'énoncé a mis en évidence un intervalle I tel que tous les termes de la suite sont dans I.
2. On étudie le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$. Si par exemple , g est positive sur I , alors on peut dire d'après **1.** que pour tout entier n, on a $g(u_n) \geq 0$, ce qui donne que (u_n) est croissante, puisque $g(u_n) = u_{n+1} - u_n$.

T12 **Limites possibles d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$?**

1. On part de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et on y passe à la limite après avoir prouvé que (u_n) converge vers un réel ℓ (souvent par convergence monotone). On obtient alors que l'équation (Fix) est vérifiée par ℓ, qui, en la résolvant donne les valeurs possibles de ℓ : $\ell = \ell_1$, ou $\ell = \ell_2, \ldots$.
2. Si on soupçonne que $\ell = \ell_1$, on le prouve *par élimination* : on prouve en effet que $\ell \neq \ell_2, \ldots$Cela s'obtient souvent par le fait que ℓ est le plus petit minorant de la suite (u_n) (si elle est croissante, *cf.* **Thm. 6**). Par exemple : «$\ell_2 > \ell_1$, donc ℓ_2 n'est pas le plus petit majorant, donc $\ell \neq \ell_2$», ou bien : « $u_0 > \ell_2$, donc ℓ_2 n'est pas un majorant de la suite (u_n).»

■ **Remarque 9.**
On peut avoir des situations très compliquées, notamment si aucune monotonie ne s'observe lors du tracé des premiers termes. Dans ce cas, il peut être salvateur d'étudier les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) associées à la fonction $f \circ f$.

T13 **Convergence d'une suite récurrente quand on a estimé f'**

Si on a un bon contrôle de la dérivée f' sur I, typiquement :

$$|f'(x)| \text{ est bornée par une constante } k \in]0,1[\qquad (\star)$$

On peut alors abréger la démonstration :

1. en remarquant que

$$|u_{n+1}-\ell| = |f(u_n)-f(\ell)| \underset{\text{TAF}+(\star)}{\leq} k|u_n-\ell|$$

2. en montrant par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |u_n-\ell| \leq k^n |u_0-\ell|$$

3. en concluant par le théorème des gendarmes.

7 Étude des suites implicites

A) Suites du type $f_n(x_n)=0$ [Classique oral]

T14 **Étudier les suites implicites $f(x_n)=0$**

1. Monotonie de (x_n) :
   - **a)** trouver une relation (R) entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ pour $x \in I$, quand on sait que tous les termes x_n sont dans I. En général cela donne une inégalité (S) entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$, mettons que l'on arrive à

     $$(S) \quad \forall x \in I \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

   - **b)** Appliquer (S) à $x = x_n$:

     $$\forall \in \mathbf{N} \quad f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n).$$

   - **c)** Remarquer que par définition $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) (=0)$, donc $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$.
   - **d)** En utilisant la monotonie de f_{n+1}^{-1}, cela donne la monotonie de (x_n)
2. Renseignement sur la limite ℓ : partir de $f_n(x_n)=0$ et passer à la limite (☠)
3. Équivalent de x_n : analyse des croissances comparées et factorisation dans la relation $f_n(x_n)=0$ par terme le plus haut de l'échelle.

■ Exemple 7.
Soit $n \geq 3$ un entier, et f_n la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{2x^n}{1+x^2}$.

1. Montrer que pour tout entier n, l'équation :

   $$(E_n) \qquad f_n(x) = \mathrm{e}$$

   admet une unique solution notée x_n dans la suite.
2. Montrer que $x_n \in I$ où $I = [1,+\infty[$
3. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in I$.
4. En déduire la monotonie de (x_n).
5. Montrer que (x_n) converge vers un réel $\ell \geq 1$.
6. Montrer que $\ln x_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}(1+x_n^2)\right)$.
7. Montrer que $\ell = 1$
8. On pose $\varepsilon_n = x_n - 1$. Calculer un équivalent de ε_n.

B) Suites du type $f(u_n) = y_n$

C'est un cas particulier du précédent car l'équation $f(u_n) = y_n$ s'écrit aussi $g_n(u_n) = 0$ en choisissant pour fonction $g_n : x \mapsto f(x) - y_n$. Néanmoins, l'étude dans ce cas est en général plus simple que dans le cas **A)**, *c'est pourquoi on en a fait une technique à part entière.*

T15

Étudier les suites implicites $f(u_n) = y_n$

1. Établir que $u_n = f^{-1}(y_n)$ par bijectivité de f (ou d'une restriction de f).
2. Monotonie de (u_n) : Partir de la monotonie de (y_n), mettons $y_{n+1} \leq y_n$, puis appliquer f^{-1} ce qui donne la monotonie de (u_n).
3. Limite : examiner la limite de (y_n) et considérer que $u_n = f^{-1}(y_n)$. Utiliser le tableau de variations de f^{-1} pour conclure.
4. Équivalent de u_n : analyse des croissances comparées et factorisation dans l'équation $f(u_n) = y_n$ par terme le plus haut de l'échelle.

Exemple 8.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'équation
$$(E_n) \quad \ln x + \sqrt{x} = n$$
a une unique solution u_n, et que $u_n \geq 1$.
2. Étudier la monotonie de (u_n) et calculer sa limite.
3. Calculer un équivalent de u_n.