$\boxed{\text{DS n°1 : 2h}}$

Vendredi 12 septembre 2025

Pensez à la marge à gauche sur vos copies et à $\boxed{\textit{encadrer}}$ ou souligner vos résultats.

Exercice 1

Partie I : Etude d'une suite définie implicitement

Pour tout entier n, on considère l'équation : $x + e^{nx} = 2 \quad (E_n)$

On définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x + e^{nx} - 2$$

1. Résoudre l'équation (E_0). On notera x_0 son unique solution.
2. Étudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$.

   En déduire qu'il existe une unique solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation (E_n). On la notera x_n.
3. (a) En calculant $f_n(x_{n+1})$ déterminer la monotonie de (x_n) et montrer qu'elle converge. On notera ℓ sa limite.

   (b) Déterminer la valeur de ℓ
4. (a) Montrer qu'on a l'équivalent suivant : $x_n \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$ quand $n \to +\infty$

   (b) On pose pour $n \geqslant 1$: $\varepsilon_n = x_n - \dfrac{\ln(2)}{n}$. Déterminer un équivalent de ε_n.

   Montrer finalement que :

   $$x_n = \frac{\ln(2)}{n} + \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{en } +\infty$$

   où a est une constante à préciser.

Partie II : Approximation de x_1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(2 - u_n)$$

On pose $\varphi(x) = \ln(2 - x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de φ, ses variations. Établir son tableau de variation.

   À l'aide de constructions sur le graphe de φ donné en annexe, conjecturer le comportement de la suite (u_n).
2. Calculer u_1, u_2, u_3. Préciser le signe de $(u_2 - u_0)$ et de $(u_3 - u_1)$.
3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in N,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
4. On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n},\ w_n = u_{2n+1}$$

   (a) Étudier la monotonie des suites (v_n) et (w_n).

   (b) Montrer qu'elles sont convergentes. On notera l_1 et l_2 leurs limites respectives.

   (c) À l'aide de la fonction $\psi : x \to e^x - x$, montrer $\ell_1 = \ell_2$.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 2

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.
   On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donner l'ensemble des solutions en utilisant les puissances de j.
   (b) En le démontrant, donner la valeur de j^3, de $\overline{j}$ et de $1 + j + j^2$.

Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

2. Montrer que P est divisible par $(X - j)^2$.
3. Montrer que si un polynôme Q est dans $\mathbb{R}[X]$ et possède une racine α complexe, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de Q. En déduire une autre racine double de P.
4. Déterminer le degré de P, puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
5. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0 \quad$ et $\quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}, \quad \forall n \geqslant 1$.
On admet que la suite $(u_n)_n$ est correctement définie.

1. Écrire en langage `Python`, **une fonction** `termeU` qui prend en paramètre **un réel** u_0 et **un entier** n, et renvoie **le terme** u_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1 + x)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n},$$
   et que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (d) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.
   (a) On considère une suite $(t_n)_n$ qui converge vers 0.
      i. Justifier qu'à partir d'un certain rang, $t_n \in [-1, +\infty[$.
      ii. Déterminer un équivalent simple de $\sqrt{1 + t_n} - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.
5. (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1})$.
   (b) Justifier qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant u_{n-1} - \frac{1}{2}.$$
   (c) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite $(u_n)_n$ devient croissante à partir d'un certain rang.

Nom :