

DS 1 : Corrigé

Exercice 1

Partie I : Etude d'une suite définie implicitement

Pour tout entier n , on considère l'équation :

$$x + e^{nx} = 2 \quad (E_n)$$

On définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x + e^{nx} - 2$$

1. Résoudre l'équation (E_0) . On notera x_0 son unique solution.

$$x + 1 - 2 = 0 \iff \boxed{x_0 = 1}$$

2. Étudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$.

En déduire qu'il existe une unique solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation (E_n) . On la notera x_n .

f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'_n(x) = 1 + ne^{nx} > 0$ donc f_n strictement croissante sur $[0, +\infty[$

f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, passant de -1 à $+\infty$, donc par le théorème de la bijection :

$$\boxed{\exists ! x_n \in \mathbb{R}^{+*} \text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$$

Rq : $x_n \neq 0$ car $f_n(0) = -1$

$$f_n(1) = 1 + e^n - 2 = e^n - 1 > 0 \text{ dès que } n \geq 1, \text{ donc } x_n < 1 \quad \text{CCL : } \boxed{\forall n \geq 1, 0 < x_n < 1}$$

3. (a) Déterminer la monotonie de (x_n) et montrer qu'elle converge. On notera ℓ sa limite.

Pour n fixé : $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} + e^{nx_{n+1}} - 2$

$$\begin{aligned} \text{Or } f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \text{ par def, } \Rightarrow x_{n+1} = 2 - e^{(n+1)x_{n+1}} \text{ d'où } f_n(x_{n+1}) &= 2 - e^{(n+1)x_{n+1}} + e^{nx_{n+1}} - 2 \\ &= e^{nx_{n+1}}(1 - e^{x_{n+1}}) < 0 \end{aligned}$$

car $x_{n+1} > 0 \Rightarrow e^{x_{n+1}} > 1$.

Donc $f_n(x_{n+1}) < 0 = f_n(x_n) \Rightarrow \boxed{x_{n+1} \leq x_n}$ car f_n croissante sur $\mathbb{R}^+$. La suite (x_n) est décroissante

Enfin, elle est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{\text{elle converge, vers } \ell \geq 0}$

- (b) Déterminer la valeur de ℓ

On a $x_n + e^{nx_n} - 2 = 0$, et $x_n - 2 \rightarrow \ell - 2$.

Si $\ell \neq 0$ alors $nx_n \rightarrow +\infty$ et $e^{nx_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow x_n + e^{nx_n} - 2 \rightarrow +\infty$ CONTRADICTION!! donc $\boxed{\ell = 0}$

4. (a) Montrer qu'on a l'équivalent suivant : $x_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$

On reprend $x_n + e^{nx_n} - 2 = 0 \iff e^{nx_n} = 2 - x_n \iff nx_n = \ln(2 - x_n)$

Puisque $x_n \rightarrow 0$ alors $\ln(2 - x_n) \rightarrow \ln(2)$ quand $n \rightarrow +\infty$. d'où $nx_n \sim \ln(2) \iff \boxed{x_n \sim \frac{\ln(2)}{n}}$

- (b) On pose pour $n \geq 1$: $\varepsilon_n = x_n - \frac{\ln(2)}{n}$. Déterminer un équivalent de ε_n .

Montrer finalement que :

$$x_n = \frac{\ln(2)}{n} + \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{en } +\infty$$

où a est une constante à préciser.

$$\text{On a aussi } x_n = \frac{\ln(2-x_n)}{n} = \frac{\ln(2)}{n} + \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{x_n}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \varepsilon_n = x_n - \frac{\ln(2)}{n} = \frac{\ln(2)}{n} + \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{x_n}{2}\right) - \frac{\ln(2)}{n} = \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{x_n}{2}\right)$$

$$\text{Comme } x_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \Rightarrow -\frac{x_n}{2} \rightarrow 0 \text{ et } \ln\left(1 - \frac{x_n}{2}\right) \sim -\frac{x_n}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_n \sim -\frac{x_n}{2n} \sim -\frac{\ln 2}{2n^2}}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_n = -\frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \boxed{x_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \text{ avec } a = -\frac{\ln(2)}{2}.$$

Partie II : Approximation de x_1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(2 - u_n)$$

On pose $\varphi(x) = \ln(2 - x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de φ , ses variations. Établir son tableau de variation.

$$\varphi(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \ln(2-x) \text{ défini} \Leftrightarrow x < 2, \text{ donc } \boxed{\mathcal{D}_\varphi =]-\infty, 2[}$$

De plus φ est dérivable sur son domaine de définition et $\varphi'(x) = \frac{-1}{2-x} < 0$, donc φ strictement décroissante de $+\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2-x)$ à $-\infty = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x)$.

À l'aide de constructions sur le graphe de φ donné en annexe, conjecturer le comportement de la suite (u_n) . On conjecture que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire, et que la suite (u_n) converge vers le point fixe de φ .

2. Calculer u_1, u_2, u_3 . Préciser le signe de $(u_2 - u_0)$ et de $(u_3 - u_1)$.

$$u_0 = 1 \Rightarrow u_1 = \ln(1) = 0, \text{ puis } u_2 = \ln(2) \text{ et } u_3 = \ln(2 - \ln(2)).$$

$$\text{Comme } 2 < e \text{ et } \ln \text{ strictement croissante, } \ln(2) < \ln(e) = 1 \Leftrightarrow \ln(2) - 1 < 0 \text{ donc } \boxed{u_2 - u_0 < 0}$$

$$\text{On en déduit aussi que } 2 - \ln(2) > 1 \Rightarrow \ln(2 - \ln(2)) > 0 \text{ donc } \boxed{u_3 - u_1 > 0}$$

3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

Soit $P(n)$: " u_n est défini et $0 \leq u_n \leq 1$ ", montrons $P(n)$ par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$.

→ Pour $n = 0$, u_0 défini par hypothèse et $u_0 = 1 \in [0, 1]$. Donc $P(0)$ est vérifiée.

→ Supposons $P(n)$ vraie pour un n fixé. On a par HR $0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow \varphi(u_n)$ existe car $u_n \in \mathcal{D}_\varphi$ donc u_{n+1} est bien défini.

De plus $\varphi(0) \geq \varphi(u_n) \geq \varphi(1) \Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \ln(2) < 1$ donc $P(n+1)$ est vérifiée.

→ CCL : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien définie, et } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]}$

4. On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n}, \quad w_n = u_{2n+1}$$

- (a) Étudier la monotonie des suites (v_n) et (w_n) .

Comme $u_2 < u_0 \Leftrightarrow v_1 < v_0$ d'après 2., on va montrer par récurrence que (v_n) est décroissante.

En effet on a l'initialisation, et si pour n fixé, $v_n < v_{n-1} \Leftrightarrow u_{2n} < u_{2n-2}$, alors en composant 2 fois par φ , on obtient $\varphi(u_{2n}) > \varphi(u_{2n-2}) \Leftrightarrow u_{2n+1} > u_{2n-1}$,

puis $\varphi(u_{2n+1}) < \varphi(u_{2n-1}) \iff u_{2n+2} < u_{2n} \iff v_{n+1} < v_n$.

Finalement pour tout n , $v_{n+1} < v_n$ et la suite (v_n) est décroissante

Enfin $u_{2n+2} < u_{2n}$ pour tout n donne en composant par $\varphi : u_{2n+3} > u_{2n+1} \iff w_{n+1} > w_n$ donc la suite (w_n) est croissante

(b) *Montrer qu'elles sont convergentes. On notera ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives.*

Les deux suites sont monotones et bornées par $[0, 1]$, donc par le Th de convergence monotone, elles convergent. Notons $u_{2n} \rightarrow \ell_1$ et $u_{2n+1} \rightarrow \ell_2$ quand $n \rightarrow +\infty$.

(c) *À l'aide de la fonction $\psi : x \rightarrow e^x - x$, montrer $\ell_1 = \ell_2$.*

$$\text{Pour tout } n, u_{2n+1} = \ln(2 - u_{2n}) \iff e^{u_{2n+1}} + u_{2n} = 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} e^{\ell_2} + \ell_1 = 2 \quad (1)$$

$$\text{Et de même } u_{2n+2} = \ln(2 - u_{2n+1}) \iff e^{u_{2n+2}} + u_{2n+1} = 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} e^{\ell_1} + \ell_2 = 2 \quad (2)$$

$$(2) - (1) : e^{\ell_1} + \ell_2 - (e^{\ell_2} + \ell_1) = 0 \iff e^{\ell_1} - \ell_1 = e^{\ell_2} - \ell_2 \iff \psi(\ell_1) = \psi(\ell_2)$$

Or $\psi'(x) = e^x - 1 \geq 0$ sur $[0, 1]$, donc ψ strictement croissante sur $[0, 1]$, donc injective.

D'où $\psi(\ell_1) = \psi(\ell_2) \Rightarrow$ $\ell_1 = \ell_2$

5. *En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.*

Les deux suites extraites d'indice pair et impair convergent vers la même limite ℓ_1 , on en déduit que (u_n) converge vers ℓ_1 . Alors en passant à la limite dans $u_{n+1} = \ln(u_n - 2)$ on obtient :

$$\ell_1 = \ln(2 - \ell_1) \iff e^{\ell_1} = 2 - \ell_1 \iff e^{\ell_1} + \ell_1 = 2 \iff \text{}\ell_1 = x_1\text{}$$

Conclusion : La suite (u_n) converge vers x_1

Exercice 2 : Corrigé

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donner l'ensemble des solutions en utilisant les puissances de j .

0 n'est pas solution de $z^3 = 1$, donc on peut poser l'inconnue z sous forme exponentielle : $z = \rho e^{i\theta}$

$$\text{Alors } z^3 = 1 \iff \rho^3 e^{i3\theta} = 1 \iff \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \boxed{z = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k = 0, 1, 2}$$

$$\text{CCL : } \boxed{\text{Sol} = \{j^0, j, j^2\} = \{1, j, j^2\}}$$

- (b) En le démontrant, donner la valeur de j^3 , de $\bar{j}$ et de $1 + j + j^2$.

$$j^3 = e^{i\frac{3 \times 2\pi}{3}} = e^{i2\pi} \iff \boxed{j^3 = 1} \qquad \bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \iff \boxed{\bar{j} = j^2}$$

Dans $1 + j + j^2$ on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$, donc

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - 1}{1 - j} \iff \boxed{1 + j + j^2 = 0}$$

$$\text{Soit } P = (X + 1)^7 - X^7 - 1.$$

2. Montrer que P est divisible par $(X - j)^2$.

Pour cela il suffit de montrer que j est racine double de P , donc que $P(j) = P'(j) = 0$.

$$P(j) = (j + 1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - \underbrace{j^6}_{=1} \times j - 1 = -j^{14} - j - 1 = -\underbrace{j^{12}}_{=1} \times j^2 - j - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

$$P'(X) = 7(X + 1)^6 - 7X^6 \implies P'(j) = 7(j + 1)^6 - 7j^6 = 7((-j^2)^6 - j^6) = 7(1 - 1) = 0$$

donc j est bien une racine (au moins) double de $P \iff \boxed{P \text{ est divisible par } (X - j)^2}$

3. Montrer que si un polynôme Q est dans $\mathbb{R}[X]$ et possède une racine α complexe, alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de Q .

En déduire une autre racine double de P .

Ecrivons Q sous la forme $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ avec tous les b_k réels.

$$\alpha \text{ racine de } Q \iff Q(\alpha) = 0 \iff \sum_{k=0}^n b_k \alpha^k = 0$$

$$\text{Passons au conjugué : } \iff \overline{\sum_{k=0}^n b_k \alpha^k} = \bar{0} \iff \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \bar{\alpha}^k = 0 \quad \text{d'après les propriétés du passage au conjugué.}$$

$$\text{Or } b_k \in \mathbb{R} \iff \bar{b}_k = b_k, \text{ donc finalement } Q(\alpha) = 0 \iff \sum_{k=0}^n b_k \bar{\alpha}^k = 0 \iff Q(\bar{\alpha}) = 0 \iff \boxed{\bar{\alpha} \text{ racine de } Q}$$

$$P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } P' \text{ aussi, donc } \bar{j} \text{ racine des deux } \Rightarrow \boxed{\bar{j} \text{ est racine (au moins) double de } P}$$

4. Déterminer le degré de P , puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

$$P(X) = X^7 + 7X^6 + \dots - X^7 - 1 = 7X^6 + \dots - 1, \text{ donc } \boxed{P \text{ de degré 6 et de coefficient dominant 7}}$$

Dans $\mathbb{C}$, on a déjà l'équivalent de 4 racines, puisque j est une racine double, et $\bar{j}$ aussi.

Il reste à déterminer 2 racines. On les cherche comme racine évidente.

Or $P(0) = 1^7 - 1 = 0$, donc 0 est racine de P .

$P(-1) = (-1 + 1)^7 - (-1)^7 - 1 = 0$, donc -1 est racine de P .

$$\text{CCL : } \boxed{P(X) = 7X(X + 1)(X - j)^2(X - \bar{j})^2}$$

5. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

$$(X - j)(X - \bar{j}) = X^2 - (j + \bar{j})X + j\bar{j} = X^2 - 2\text{Re}(j)X + |j|^2 = X^2 + X + 1$$

$$\text{d'où dans } \mathbb{R}[X], \quad \boxed{P(X) = 7X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2}$$

Exercice 3 : Corrigé

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

On admet que la suite $(u_n)_n$ est correctement définie.

1. Écrire en langage **Python**, **une fonction terme** qui prend en paramètre **un entier** n et renvoie **le terme** u_n .
On pourra initialiser la suite à $u_0 = 1$.

```
from numpy import*
def terme(u0,n):
    u=u0 # initialisation de u avec la valeur u_0
    for k in range(1,n+1): # on passe n fois dans la boucle, k de 1 a n
        # pour k=1 on calcule u_1, pour k fixe on calcule u_k
        u= sqrt(k+u)
    return u
```

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

Par une récurrence immédiate, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \geq \sqrt{n}$, par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$.

3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$.

Soit $x \geq 0$, comme la fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x) &\iff x \leq \frac{1}{4}(1+x)^2 \\ &\iff 4x \leq x^2 + 2x + 1 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\iff (x-1)^2 \geq 0 \quad (\text{vraie!}) \end{aligned}$$

Comme nous avons raisonné par équivalence, on peut affirmer que la première propriété est vraie.

- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n},$$

et que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

On considère la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(n) : "u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}."$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$\boxed{\implies}$ **Initialisation.** Si $n = 0$, alors $0 + \frac{u_0}{2^0} = u_0 \geq u_0$, et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\longrightarrow}$ **Hérédité.** Soit $n \geq 0$ fixé, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ et l'inégalité précédente :

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \sqrt{n+1+n+\frac{u_0}{2^n}} \leq \frac{1}{2}(1+n+1+n+\frac{u_0}{2^n}) = n+1+\frac{u_0}{2^{n+1}}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$\boxed{\longrightarrow}$ **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

D'après ce qu'on vient de montrer, on a

$$0 \leq u_{n-1} \leq (n-1) + \frac{u_0}{2^{n-1}},$$

donc

$$0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \underbrace{\frac{n-1}{n^2}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}.$$

D'après le **théorème d'encadrement**, on peut affirmer que $\boxed{\frac{u_{n-1}}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.}$

(c) Montrer que la suite $(\frac{u_n}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0.

On a pour $n \geq 1$:

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{0} = 0,$$

par continuité de la racine en 0. CCL : $\boxed{\text{la suite } (\frac{u_n}{n})_{n \geq 1} \text{ converge vers 0.}}$

(d) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente, on peut affirmer que

$$\frac{u_{n-1}}{n} = \left(\frac{u_{n-1}}{n-1} \right) \times \left(\frac{n-1}{n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

donc

$$u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} = \sqrt{n} \times \underbrace{\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}.$$

On a bien $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}}$

4. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

(a) On considère une suite $(t_n)_n$ qui converge vers 0.

i. Justifier qu'à partir d'un certain rang, $t_n \in [-1, +\infty[$.

Il suffit de revenir à la définition de la convergence vers 0, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N \implies -1 \leq t_n \leq 1 \implies t_n \in [-1, +\infty[.$$

ii. Déterminer un équivalent simple de $\sqrt{1+t_n} - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C'est du cours, comme $t_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\sqrt{1+t_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t_n}{2}.$$

- (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right).$$

D'après la question précédente, on sait que

$$\frac{u_{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc

$$w_n \sim \sqrt{n} \frac{u_{n-1}}{2n} = \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \times \underbrace{\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{2}}.$$

5. (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1})$.

Soit par la quantité conjuguée, soit de la façon suivante :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n-1} \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1 \right) = \sqrt{n-1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n-1}} - 1 \right) \sim \frac{\sqrt{n-1}}{2(n-1)} = \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}.$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n - u_{n-1} = (w_n + \sqrt{n}) - (w_{n-1} + \sqrt{n-1}) = \underbrace{(w_n - w_{n-1})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0} + \underbrace{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}.$$

- (b) Justifier qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq n_0 \implies u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.

Il suffit d'appliquer la définition de la convergence vers 0 de $(u_n - u_{n-1})_n$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \implies -\frac{1}{2} \leq u_n - u_{n-1} \leq \frac{1}{2}$, donc $\boxed{n \geq n_0 \implies u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}}$

- (c) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite $(u_n)_n$ devient croissante à partir d'un certain rang.

Soit $n \in \mathbb{N}$, en exploitant la quantité conjuguée :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}} = \frac{1+u_n-u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}.$$

Comme le dénominateur est manifestement positif, on peut conclure que $u_{n+1} - u_n$ est du signe du numérateur : $1 + u_n - u_{n-1}$. Ainsi à partir du rang n_0 de la question précédente, on a :

$$u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2} \implies 1 + u_n \geq u_{n-1} + \frac{1}{2} \implies 1 + u_n - u_{n-1} \geq 0 \implies u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est croissante.}}$