PROGRAMME DE COLLES

SEMAINE 1 : 16 AU 20 SEPTEMBRE 2024

Révisions 1 - Suites : voir extraits du programme de première année en annexe.

Révisions 2 - Fonctions : voir extraits du programme de première année en annexe.

Chapitre 1 - Séries réelles : tout le chapitre, voir l'extrait du programme de deuxième année en annexe.

La colle débutera par une question de cours, par exemple :

— Allure de la représentation graphique de la fonction arctan.
— Allure des représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme népérien.
— Donner le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
— Énoncer le théorème de Rolle.
— Développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.
— Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.
— Rappeler la formule des accroissements finis.
— Définition de la négligeabilité d'une fonction par rapport à une autre au voisinage de $+\infty$.
— Énoncer la définition et le théorème des suites adjacentes.
— Croissances comparées entre les suites puissance n^α (avec $\alpha > 0$), géométrique a^n (avec $a > 1$) et factorielle $n!$.
— Si α est un réel fixé, rappeler les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(\alpha)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
— Donner la définition de la partie entière d'un réel.
— Développement limité à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ lorque x est au voisinage de 0.
— Convergence et somme des séries exponentielles.
— Convergence et somme éventuelle des séries géométriques, et séries géométriques « dérivées » et « dérivées secondes ».
— Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.
— Donner la définition de la convergence et convergence absolue d'une série.
— Enoncer le critère de comparaison pour des séries à termes positifs.
— Enoncer le critère d'équivalence pour des séries à termes positifs.

Analyse 1– Suites réelles usuelles

Le but de ce chapitre est d'étendre un peu l'ensemble des suites « connues » et de développer les aptitudes au calcul sur ces suites ; le point de vue est ici algébrique.

On ne travaille ici qu'avec des suites réelles.

Contenus	**Commentaires**
Somme, produit, quotient de suites réelles.	
Suites arithmétiques, suites géométriques. Terme général.	
Suites arithmético-géométriques.	La formule donnant le terme général n'est pas au programme. On cherchera une suite constante solution pour déterminer toutes les solutions.
Suites vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.	On se limite à la maitrise d'une méthode de calcul du n-ième terme à partir de l'équation caractéristique. Au besoin, on transite par $\mathbf{C}$ dans le seul but de restituer plus rapidement la forme des solutions. ⇌ On pourra illustrer ces différents types de suites avec des modèles discrets de populations. ⇌ Algorithme de calcul du n-ième terme.

Analyse 5 – Suites réelles

Contenus	**Commentaires**
Suites majorées, minorées, bornées. Suites monotones.	
Convergence, divergence. Limite infinie.	La définition d'une limite par (ε, n_0) est présentée, mais aucune technicité ne pourra être exigée en la matière.
Comparaison de la convergence et de la limite d'une suite (u_n) avec celles des deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).	Utilisation de cette comparaison pour justifier une divergence. La notion générale de suite extraite est hors programme.
Opérations sur les limites.	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités : • Signe d'une suite de limite non nulle. • Passage à la limite dans une inégalité large. • Théorème d'encadrement, dit « des gendarmes », et extension aux limites infinies.	
Théorème de la limite monotone.	Toute suite réelle monotone admet une limite finie ou infinie.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.	
Exemples d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.	Un plan d'étude détaillé sera toujours proposé. Il pourra commencer par la détermination d'un intervalle stable. Aucun théorème général relatif à ce type de suites n'est exigible des étudiants. L'étude numérique (par itération) et graphique sont présentées comme outils d'étude et de formation de conjectures. L'objectif est alors l'étude de la monotonie et de la convergence de telles suites dans les cas simples de fonctions f monotones.
Croissances comparées entre les suites factorielle, puissance (n^α avec $\alpha > 0$), géométriques (a^n avec $a > 1$).	
Suites équivalentes, notation $u_n \sim v_n$. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	Le développement sur les équivalents doit être modeste et se limiter aux suites dont le terme général ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Analyse 2 – Fonctions réelles usuelles

Le but de ce chapitre est de consolider et d'enrichir modérément le registre des fonctions usuelles. Pour chaque fonction, la maitrise attendue concerne la définition, les principales propriétés, la formule de dérivation (avec son domaine de validité) et la courbe représentative.

Contenus	Commentaires
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	On se contente de donner ou de rappeler les définitions dans le cadre des fonctions réelles de la variable réelle.

Contenus (suite)	Commentaires
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. $\rightleftharpoons$ Utilisation d'une bibliothèque graphique Python.
Notions d'image et d'antécédent.	
Parité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Fonctions majorées, minorées, bornées. Monotonie. Opérations algébriques sur les fonctions. Composition de fonctions.	
b) Étude d'une fonction	
Réduction du domaine d'étude selon les symétries et/ou les périodicités déterminées. Tableau de variations. Équation de la tangente en un point. Asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.	On abordera uniquement des exemples simples. Les notions de continuité, dérivabilité et asymptotes obliques seront étudiées dans les chapitres Analyse 6, Analyse 7 et Analyse 10.
c) Fonctions usuelles	
Fonctions affines.	
Fonctions puissances d'exposant entier (dans $\mathbf{Z}$), . Fonction racine carrée. Fonctions exponentielle et logarithme néperien (ln).	Les polynômes seront développés dans le chapitre Algèbre – Polynômes réels. $\rightleftharpoons$ Pour ces diverses fonctions, les courbes représentatives sont mises en valeur comme des outils fondamentaux pour la modélisation, la reconnaissance des formes graphiques etc.
Notation a^b.	On généralise les propriétés évoquées dans Outils 2.
Fonctions exponentielles : $x \mapsto a^x$ avec $a \in \mathbf{R}_+^*$.	
Fonction logarithme décimal (log).	Les logarithmes dans une base différente de e et 10 sont hors programme. Les fonctions hyperboliques sont hors programme.
Fonctions puissances : $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$	$x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
Fonctions circulaires : sin, cos et tan.	Formule $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.
Fonctions partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ et valeur absolue $\lvert\cdot\rvert$.	

Analyse 3 – Calculs de dérivées, de primitives et d'intégrales

Le but de ce chapitre est de consolider et de compléter la maitrise des règles de dérivation et de quelques techniques de primitivation pour permettre la résolution d'équations différentielles et leur utilisation en sciences physiques.

Contenus	Commentaires
a) Calculs de dérivées	
Calculs des dérivées : sommes, produits, quotients.	Révision des règles correspondantes. Les dérivées des fonctions usuelles doivent être connues. On pourra introduire la notation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.
Dérivation d'une fonction composée.	On insiste sur le fait qu'une composée de fonctions dérivables est dérivable.
b) Calcul des dérivées partielles d'une fonction de deux variables	
Dérivées partielles d'une fonction de deux variables.	On introduit les notations $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$. $\rightleftharpoons$ Le calcul des dérivées partielles est présenté en lien avec l'usage qui en est fait en physique.
c) Calculs de primitives	
Primitives usuelles et calculs simples de primitives.	Primitives de $u'e^u$, $u'u^n$, u'/u, $u'/\sqrt{u}$, $u'\sin u$, $u'\cos u$.

Contenus (suite)	Commentaires
	On remarquera que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.
d) Calculs d'intégrales Calcul à l'aide d'une primitive.	À ce stade, le lien entre primitives et intégrales est admis. On interprétera l'intégrale en termes d'aires et les propriétés de l'intégrale seront étudiées plus formellement dans le chapitre Analyse 8.
Intégration par parties. Changement de variable.	La théorie du changement de variable sera faite dans Analyse 8.

Analyse 6 – Limites, continuité des fonctions réelles

Contenus	Commentaires
a) Limites Limite d'une fonction en un point.	La définition d'une limite par (ε, α) est présentée, mais les détails techniques ne sont pas un attendu du programme.
Limite à droite, limite à gauche. Limite en $+\infty$ ou $-\infty$. Si (u_n) tend vers a et si la limite de f en a est b, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers b. Opérations sur les limites. Limite de fonctions composées.	
Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités : • Signe d'une fonction de limite non nulle. • Passage à la limite dans une inégalité large. • Théorème dit « des gendarmes » et extension aux limites infinies. Théorème de la limite monotone.	Une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite finie ou infinie aux bornes de l'intervalle.
b) Comparaison de fonctions Croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes.	Connaissance de $\lim_{x\mapsto 0} x^\alpha \ln^\beta(x)$, de $\lim_{x\mapsto +\infty} x^\alpha \exp(-\beta x^\gamma)$ où α, β, γ prennent des valeurs usuelles conduisant à des indéterminations.
Fonctions équivalentes, notation $f \sim g$. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	Le développement reste modeste et se limite aux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point de référence.
c) Continuité Continuité en un point. Continuité à droite et à gauche.	

Contenus (suite)	Commentaires
Opérations, composition. Prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle.	
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	Ce résultat est admis.
Théorème des valeurs intermédiaires.	On peut présenter une idée de la démonstration en s'appuyant sur un principe de dichotomie.
d) Bijections continues Théorème de la bijection : une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'ensemble $f(I)$, qui est un intervalle, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$.	$\rightleftharpoons$ Algorithme de dichotomie sur des exemples d'équations de type $f(x) = 0$.
Définition, monotonie et représentation graphique de la fonction arctan.	Aucune formule n'est à connaitre excepté l'imparité de la fonction arctan.

Analyse 7 – Dérivation des fonctions réelles

Contenus	Commentaires
a) Dérivée	
Dérivée en un point. Dérivée à gauche, dérivée à droite. Fonction dérivée. Notations f' et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.	
Interprétation graphique, équation de la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$.	Révisions des acquis des classes antérieures.
Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonction composée.	La formule de Leibniz est hors programme.
Dérivation d'une fonction réciproque.	Dérivée de la fonction arctan.
b) Théorème de Rolle et conséquences	
Théorème de Rolle. Formule des accroissements finis.	L'inégalité des accroissements finis est hors programme et doit être établie à chacune de ses utilisations.
Caractérisation des fonctions croissantes (au sens large) par la positivité de leur dérivée. Cas des fonctions constantes.	
Cas des fonctions strictement croissantes.	Une fonction continue définie sur un intervalle et dont, sauf peut-être en un nombre fini de points, la dérivée existe et est strictement positive, est strictement croissante.
Recherche d'extrémums.	
c) Dérivées d'ordre supérieur	
Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.	La formule de Taylor-Lagrange est hors programme.
Une combinaison linéaire, le produit et la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$.	

Analyse 9 – Développements limités et études de fonctions réelles

Contenus	Commentaires
a) Développements limités	
Définition de la notation $o(x^n)$ pour désigner des fonctions négligeables devant la fonction $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{Z}$, au voisinage de 0 ou de l'infini.	On se ramène, aussi souvent que nécessaire, à la limite d'un quotient.
Définition des développements limités en 0. Unicité des coefficients d'un développement limité.	Les problèmes de développement limité en un réel non nul ou en $\pm\infty$ sont ramenés en 0.
Opérations sur les développements limités : somme, produit.	L'obtention d'un développement limité pour une fonction composée est présentée et mise en œuvre sur des exemples simples.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : existence d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	La formule de Taylor-Young est admise.
Développements limités usuels au voisinage de 0 : exp, cos, sin, $x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$.	Les exercices de calcul de développements limités ont pour objet de faciliter l'assimilation des propriétés fondamentales et ne doivent pas être orientés vers la virtuosité calculatoire : sur les exemples numériques, on évitera tout développement limité au-delà de l'ordre 3.
b) Applications des développements limités	
Calcul d'équivalents et de limites.	

Contenus (suite)	Commentaires
Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente.	

Analyse 1 – Séries réelles

Contenus	Commentaires
Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente.	La série est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou plus succinctement $\sum u_n$. En cas de convergence, la somme de la série est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. La terminologie de « famille sommable » n'est pas donnée. La notion de reste d'une série est hors programme.
Combinaison linéaire de séries convergentes.	

Contenus (suite)	Commentaires
Thèorèmes de convergence pour deux séries à termes positifs u_n et v_n : • théorème de comparaison si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang,	Tout autre critère de convergence est hors programme.
• si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	Les résultats relatifs aux restes et sommes partielles sont hors programme.
Convergence et somme de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ (pour $\|q\| < 1$) et des séries « dérivées » $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$.	
Convergence et somme de la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.	Résultat admis.
Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.	L'étude générale des séries de Riemann est hors programme.
Convergence absolue.	La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de la série. En vue des applications probabilistes, on admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes. L'étude de séries semi-convergentes est hors programme.