PROGRAMME DE COLLES

Semaine 2 : du 23 au 27 Septembre 2024

Chapitre 1 - Séries réelles : voir le programme de la semaine 1.

Chapitre 2 - Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires : tout le chapitre, voir l'extrait du programme de deuxième année en annexe.

La colle débutera par une question de cours, portant (par exemple) sur les définitions ou énoncés suivants, tirées du *rapport du jury* :

- Questions de cours de la semaine 1.
- Définir ce qu'est un système complet d'événements.
- Enoncer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.
- Enoncer la formule des probabilités composées (conditionnements successifs).

Probabilités 1 – Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires

Ce chapitre étend le cadre des probabilités qui avait été posé en première année (Probabilités 1) pour aborder une situation plus générale, se prêtant à la définition des variables aléatoires discrètes ou à densité.

Les séries ont été introduites comme un outil pour donner tout leur sens aux probabilités et variables aléatoires discrètes. En dehors de questions probabilistes, les séries ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

Contenus	**Commentaires**
a) Compléments ensemblistes et notion de probabilité	
Définition de $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$.	
Notion de tribu.	On convient de nommer événements les éléments d'une tribu. Une tribu $\mathscr{T}$ (ou σ-algèbre) sur Ω est une partie de $\mathscr{P}(\Omega)$ contenant Ω, stable par passage au complémentaire et telle que, pour toute suite (B_n) d'événements, la réunion des B_n est un événement. Aucune question sur les tribus ne doit être proposée dans une épreuve de mathématiques.
Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$.	On met en valeur l'axiome de $\sigma-$additivité $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$ pour des suites (B_n) d'événements deux à deux incompatibles, et on fait remarquer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(B_n)$ converge.
Définition d'un événement négligeable, d'un événement presque sûr.	On distingue l'événement impossible (resp. certain) des événements négligeables (resp. presque sûrs).
Révisions et extensions à ce nouveau cadre des propriétés des probabilités et des définitions vues en première année, en particulier :	
• Une suite d'événements (A_n) est un système complet d'événements si les A_n sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est égale à Ω.	Pour une telle suite, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
• Formule des probabilités totales : si (A_n) est un système complet d'événements, alors, pour tout événement B, la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(A_n \cap B)$ converge et $P(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$.	Cette formule reste valable dans le cas d'une suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$; on dira dans ce cas que le système est quasi-complet. Interprétation en termes de probabilités conditionnelles, avec la convention suivante : si $P(A_n) = 0$, alors on pose $P(A_n)P_{A_n}(B) = 0$.
• Indépendance de deux événements. Indépendance (mutuelle) de n événements, d'une suite d'événements.	
b) Variables aléatoires réelles	
On nomme variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{T})$ toute application X de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$, noté $(X \leq a)$, soit un événement.	Aucune vérification du fait qu'une fonction est une variable aléatoire ne sera demandée dans une épreuve de mathématiques.
Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, alors $(X \in I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ est un événement.	Résultat admis.
Fonction de répartition : $F_X : t \mapsto P(X \leq t)$. Croissance, limites en $\pm\infty$.	
Deux variables X et Y sont dites indépendantes si pour tous intervalles I et J, $P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I)\ P(Y \in J)$.	
Généralisation au cas de n variables aléatoires, puis d'une suite de variables aléatoires.	