PROGRAMME DE COLLES

Semaine 3 : du 30 Septembre au 4 Octobre 2024

Chapitre 2 - Concepts de base des probabilités et variables aléatoires : voir semaine 2

Chapitre 3 - Variables aléatoires réelles discrètes : tout le chapitre, voir l'extrait du programme en annexe

La colle débutera par une question de cours, portant (par exemple) sur les définitions ou énoncés suivants, tirées du *rapport du jury* :

— Questions de cours de la semaine 2.
— Existence et définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
— Expliciter la loi, et donner l'espérance et la variance, d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.
— Donner l'inégalité de Markov.
— Donner l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
— Expliciter la loi, et donner l'espérance et la variance, d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique.
— Expliciter la loi, et donner l'espérance et la variance, d'une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

Annexe :

Probabilités 2 – Variables aléatoires réelles discrètes

L'ensemble de ce chapitre donne l'occasion de revoir, par le biais d'exercices, les lois de probabilités finies présentées dans le programme de première année (Probabilités 2).

Contenus	**Commentaires**
a) Variables aléatoires réelles discrètes	

Contenus (suite)	**Commentaires**
Une variable aléatoire réelle est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est inclus dans un sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathbf{R}$ indexé par une partie de $\mathbf{N}$.	On pourra utiliser le terme dénombrable mais ce terme n'est pas exigible. On met en valeur le système complet d'événements formé des événements $(X = x)$ pour $x \in \mathcal{N}$. On souligne la validité de la formule des probabilités totales obtenue.
Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.	On décrit les représentations graphiques de ces deux fonctions. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition.
Si $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels deux à deux distincts et $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{i\geq 0} p_i$ converge et a pour somme 1, alors il existe une variable aléatoire réelle discrète X vérifiant $P(X = x_i) = p_i$ pour tout entier naturel i.	On tolère qu'une variable aléatoire issue d'une expérience aléatoire puisse ne pas être définie sur un événement de probabilité nulle. $\rightleftharpoons$ En lien avec l'informatique : simulation d'une variable aléatoire discrète dont la loi est imposée, construite à partir d'une variable aléatoire uniforme.
b) Indépendance Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Généralisation : indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires ; d'une suite de variables aléatoires. Propriétés de l'indépendance mutuelle : • Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi.	
• Lemme des coalitions : si $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \ldots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.	On observera que cette propriété peut s'étendre à un nombre fini de fonctions s'appliquant à une partition des variables, et en particulier au cas de $(u_1(X_1), u_2(X_2), \ldots, u_n(X_n))$.

c) Espérance et variance	
Espérance. Propriétés (linéarité, positivité, croissance).	La linéarité de l'espérance est admise.
Théorème de transfert.	Ce résultat peut être admis.
Généralisation des propriétés et des définitions vues en première année, en particulier : • Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. • Variance et moments d'une variable aléatoire. • Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X. • Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. • Variance de $aX + b$. Notion de variable centrée réduite.	
• Si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.	X^* est appelée variable centrée réduite associée à X.
• Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X + Y$.	Résultat sur l'espérance admis. Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.
d) Lois usuelles discrètes Loi de Poisson. Espérance, variance.	
Loi géométrique. Espérance, variance. Propriété d'invariance temporelle ou d'absence de mémoire de la loi géométrique.	On présente la loi géométrique comme loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. $\rightleftharpoons$ Exemples de situations expérimentales modélisées par une loi géométrique.