# PROGRAMME DE COLLES

## Semaine 5 : du 4 au 8 Novembre 2024

**Chapitre 4 - Couples de variables aléatoires discrètes** : tout le chapitre, voir l'extrait du programme ci-dessous.

**La colle débutera par une question de cours, portant (par exemple) sur les définitions ou énoncés suivants, tirées du *rapport du jury* :**

- Questions de cours de la semaine 4.
- Expliquer comment déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe.
- Définir lorsqu'elle existe la covariance d'un couple de deux variables aléatoires. Cas de deux variables indépendantes.
- Donner l'expression de $V(X+Y)$ lorsqu'elle existe.
- Comment trouver la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont on connaît la loi ?
- Rappeler les résultats connus sur la loi de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.
- Donner le théorème de transfert : espérance de $u(X,Y)$ à partir de la loi de $(X,Y)$ quand $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires discrètes finies.

### Probabilités 3 – Couples de variables aléatoires discrètes

Ce chapitre permet, par le maniement de sommes de séries, d'appréhender les phénomènes liés aux couples de variables aléatoires : lois conjointes, lois marginales, indépendance. Cependant, le théorème de transfert est énoncé dans le seul cas des couples de variables aléatoires discrètes finies, et les séries doubles ne sont au programme.

| Contenus | Commentaires |
|---|---|
| **a) Couples de variables aléatoires réelles discrètes** | |
| Couple $(X,Y)$ de deux variables aléatoires discrètes. Loi conjointe. | L'événement $((X=x)\cap(Y=y))$ est également noté $(X=x,Y=y)$. |
| Lois marginales. | |
| Lois conditionnelles. | L'espérance conditionnelle n'est pas un attendu du programme. |
| **b) Exemples de variable aléatoire de la forme $u(X,Y)$** | |
| Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X,Y)$, le couple $(X,Y)$ ayant une loi conjointe connue. | On s'intéressera en particulier au maximum et au minimum de deux ou de $n$ variables aléatoires indépendantes. |
| Cas particulier de la somme de deux variables discrètes à valeurs dans $\mathbf{N}$. | Les deux variables ne sont pas nécessairement indépendantes. |
| Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson. | Généralisation au cas de $n$ variables. |
| Théorème de transfert : espérance de $u(X,Y)$ à partir de la loi de $(X,Y)$ quand $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires discrètes finies. | Ce résultat peut être admis. |
| **c) Covariance** | |
| Covariance, formule de König-Huygens $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ et calcul effectif quand $X$ et $Y$ sont discrètes finies. | Le calcul effectif de $E(XY)$ au moyen d'une série double n'est pas au programme. |
| Variance de $X+Y$. | On remarquera qu'en cas d'indépendance $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, mais que la réciproque est fausse. |