PROGRAMME DE COLLES

SEMAINE 6 : DU 12 AU 15 NOVEMBRE 2024

Chapitre 4 - Couples de variables aléatoires discrètes : tout le chapitre, voir le programme de la semaine précédente pour le contenu.

Révisions 6 - Nombres complexes : voir extraits du programme de première année en annexe.

Chapitre 5 - Polynômes : tout le chapitre, voir l'extrait du programme ci-dessous.

La colle débutera par une question de cours, portant (par exemple) sur les définitions ou énoncés suivants, tirées du *rapport du jury* :

— Questions de cours de la semaine 5.
— Si P et Q sont deux polynômes, donner le degré de $P+Q$ (disjonction des cas).
— Définition de $\mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X], \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$.
— Caractérisation de la notion de racine par factorisation.
— Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine.
— Que peut-on dire d'un polynôme P à coefficients réels qui possède une racine complexe α ?
— Que peut-on dire d'un polynôme à coefficients réels de degré impair ? Pouvez-vous le démontrer (à l'oral) ?
— Que peut-on dire d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui admet $n+1$ racines distinctes ?
— Théorème de d'Alembert-Gauss.

Algèbre – Polynômes

Contenus	Commentaires
a) Polynômes, règles de calcul.	
Retour sur les polynômes réels : notation X pour l'application $x \mapsto x$ et réécriture d'un polynôme avec cette notation.	On remarque que les règles de calcul avec X prolongent les règles de calculs dans **R** ou **C**.
On introduit les polynômes à coefficients dans **C**. Notation X pour l'application $x \mapsto x$.	
Les opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, composée) sur les polynômes fournissent des polynômes.	
Unicité de l'écriture des polynômes : un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.	En conséquence, deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.
Coefficient dominant et degré d'un polynôme.	On convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$.
Degré d'une somme, d'un produit de polynômes.	
Notations $\mathbf{R}[X], \mathbf{C}[X], \mathbf{R}_n[X], \mathbf{C}_n[X]$.	
b) Racines et factorisation.	
Définition d'une racine α d'un polynôme P : $P(\alpha) = 0$.	
Un nombre réel ou complexe α est racine d'un polynôme P si, et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)Q$.	La division euclidienne des polynômes est hors programme.
Généralisation à plusieurs racines distinctes.	
Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	

Contenus (suite)	Commentaires
Ordre de multiplicité d'une racine.	La caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés n'est pas un attendu du programme.
Cas des polynômes réels : si α est racine, $\overline{\alpha}$ est aussi racine.	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$.	Ce théorème est admis. La factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ est hors programme.

Outils 4 – Nombres complexes

Ce chapitre est entièrement nouveau pour la majorité des étudiants.
L'ensemble des nombres complexes est introduit pour munir le plan d'opérations compatibles avec celles déjà pratiquées sur la droite réelle. Cela permet de trouver, sans exhaustivité, des solutions à des équations algébriques. Ces équations seront essentiellement à coefficients réels, de petit degré et utiles par exemple pour alléger l'étude des suites réelles récurrentes linéaires à coefficients constants et des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Contenus	**Commentaires**
a) Écriture algébrique des nombres complexes Nombres complexes. Écriture algébrique. Parties réelle et imaginaire. Propriétés élémentaires de Re et Im.	
Représentation géométrique d'un nombre complexe. Affixe d'un point, d'un vecteur. Interprétation géométrique de la somme de deux complexes.	L'utilisation des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie n'est pas un objectif du programme.

Contenus (suite)	**Commentaires**
Conjugué d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Propriétés de la conjugaison.	On fait ressortir l'efficacité du formalisme de la conjugaison (par exemple pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur).
Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Propriétés du module : multiplicativité, inégalité triangulaire.	Suivant les contextes, on choisit la formulation adéquate : $\lvert z\rvert = \sqrt{z\overline{z}}$ ou $\lvert a+\mathrm{i}b\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$.
b) Formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Propriétés $\lvert\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\rvert = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, formules d'Euler.	
Arguments d'un nombre complexe non nul. Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul. Linéarisation de $\cos^p(x)\sin^q(x)$.	On met en évidence quelques choix usuels d'intervalles permettant de définir l'argument. À chaque fois que le recours à la formule d'Euler sera nécessaire pour linéariser ou développer des formules, l'énoncé devra l'indiquer.
c) Application aux équations du second degré. Résolution des équations du second degré à coefficients réels, somme et produit des solutions.	
Résolution de l'équation $x^2 = a$ avec $a\in\mathbf{C}$.	En dehors de cette équation, qui doit pouvoir être traitée algébriquement ou en la retranscrivant trigonométriquement, la résolution des équations du second degré plus générales à coefficients complexes non réels n'est pas un attendu du programme. La recherche des racines n-ièmes de l'unité ou d'un nombre complexe quelconque dans le cas $n \geq 3$ n'est pas non plus un attendu du programme.

Analyse 10 – Fonctions réelles de deux variables réelles

En mathématiques, une épreuve écrite ou orale ne doit pas reposer sur ce chapitre.

Contenus	**Commentaires**
a) Notions fondamentales	
Exemples de sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$: demi-plan, disque, pavé.	On pourra illustrer les opérations ensemblistes à cette occasion (union, intersection).
Fonctions de deux variables. Ensemble de définition.	
Fonctions partielles.	
Surface représentative d'une fonction de deux variables, courbes ou lignes de niveau.	On souligne le lien entre fonctions partielles et certaines sections de cette surface. $\rightleftharpoons$ Des illustrations tirées de problèmes de cartographie, thermodynamique ou géologie sont ici pertinentes.
b) Continuité	
Continuité en un point, continuité sur un pavé ouvert.	Aucune question sur ces notions de continuité ne doit être posée dans une épreuve de mathématiques.
c) Dérivées partielles	
Dérivées partielles.	
Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert du plan.	Dans un énoncé on ne demandera jamais de montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$. Utilisation des dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation de la valeur d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ découlant de petites variations sur les variables.
Définition du gradient; calcul dans un repère orthonormal en coordonnées cartésiennes.	On pourra donner sans démonstration l'interprétation graphique du gradient.
Dérivation d'une expression de la forme $t \mapsto f(x(t), y(t))$, la fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ et les fonctions x, y étant dérivables.	
Définition de point critique. Lien avec l'existence éventuelle d'extremum dans le cas d'une fonction définie sur un pavé ouvert et admettant des dérivées partielles.	Toute condition suffisante d'extrémalité est hors programme. Application à l'ajustement affine par les moindres carrés.
d) Dérivées partielles d'ordre deux	
Dérivées partielles d'ordre deux, interversion des dérivations.	Le théorème de Schwarz est admis.