PROGRAMME DE COLLES

SEMAINE 8 : DU 25 AU 29 NOVEMBRE 2024

Chapitre 5 - Polynômes : tout le chapitre, voir le programme de la semaine dernière pour plus de détails.

Révisions 5 - Fonctions de deux variables : voir extraits du programme de première année en annexe.

Chapitre 6 - Espaces vectoriels : tout le chapitre, voir le contenu du programme ci-dessous.

La colle débutera par une question de cours, portant (par exemple) sur les définitions ou énoncés suivants, tirées du *rapport du jury* :

- Questions de cours de la semaine 7.
- Donner la définition d'un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- Définition d'une famille libre $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E.
- Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.
- Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.
- Donner les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Algèbre linéaire 1 – Espaces vectoriels

Ce chapitre reprend les concepts présentés en première année dans un cadre limité ($\mathbf{K}^n$) et les adapte brièvement à d'autres espaces, de dimension finie ou non.

La notion de somme de sous-espaces vectoriels n'est pas au programme.

On travaille uniquement dans des **K**-espaces vectoriels, **K** désignant **R** ou bien **C**. Lorsqu'un espace est un **C**-espace vectoriel, le considérer comme un **R**-espace vectoriel n'est pas un attendu du programme. Il n'est pas dans l'esprit du programme de rentrer dans des détails techniques comme parler de **R**-base, **C**-base, **R**-dimension, **C**-dimension.

Contenus	Commentaires
a) Structure vectorielle	
Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.	On met plus particulièrement en valeur les espaces vectoriels suivants : $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, l'ensemble des applications définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$. L'étude d'espaces de suites n'est pas un attendu du programme.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Sous-espaces vectoriels.	
Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	On introduit la notation $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.
Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence). Famille libre finie. Famille liée finie.	
Exemple fondamental de famille libre : toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.	
Base finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence). Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.	
Bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}_n[X]$.	D'autres exemples peuvent être proposés, mais les attendus du programme se limitent aux cas mentionnés.

b) Dimension On dit que E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. De toute famille génératrice finie d'un espace E non réduit au vecteur nul on peut extraire une base. Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E. Par convention, l'espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0. Dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$: • Toute famille libre peut se compléter en une base.	

Contenus (suite)	**Commentaires**
• Toute famille libre a au plus n éléments. • Une famille libre ayant n éléments est une base. • Toute famille génératrice a au moins n éléments. • Une famille génératrice ayant n éléments est une base.	Compte tenu des objectifs pédagogiques, la plupart de ces énoncés doivent être admis, mais on peut montrer comment certains de ces résultats peuvent en impliquer d'autres.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Ce rang peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

Analyse 10 – Fonctions réelles de deux variables réelles

En mathématiques, une épreuve écrite ou orale ne doit pas reposer sur ce chapitre.

Contenus	**Commentaires**
a) Notions fondamentales	
Exemples de sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$: demi-plan, disque, pavé.	On pourra illustrer les opérations ensemblistes à cette occasion (union, intersection).
Fonctions de deux variables. Ensemble de définition. Fonctions partielles.	
Surface représentative d'une fonction de deux variables, courbes ou lignes de niveau.	On souligne le lien entre fonctions partielles et certaines sections de cette surface. $\rightleftharpoons$ Des illustrations tirées de problèmes de cartographie, thermodynamique ou géologie sont ici pertinentes.
b) Continuité	
Continuité en un point, continuité sur un pavé ouvert.	Aucune question sur ces notions de continuité ne doit être posée dans une épreuve de mathématiques.
c) Dérivées partielles	
Dérivées partielles.	
Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert du plan.	Dans un énoncé on ne demandera jamais de montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$. Utilisation des dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation de la valeur d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ découlant de petites variations sur les variables.
Définition du gradient; calcul dans un repère orthonormal en coordonnées cartésiennes.	On pourra donner sans démonstration l'interprétation graphique du gradient.
Dérivation d'une expression de la forme $t \mapsto f(x(t), y(t))$, la fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ et les fonctions x, y étant dérivables.	
Définition de point critique. Lien avec l'existence éventuelle d'extremum dans le cas d'une fonction définie sur un pavé ouvert et admettant des dérivées partielles.	Toute condition suffisante d'extrémalité est hors programme. Application à l'ajustement affine par les moindres carrés.
d) Dérivées partielles d'ordre deux	
Dérivées partielles d'ordre deux, interversion des dérivations.	Le théorème de Schwarz est admis.