PROGRAMME DE COLLES

SEMAINE 16 : DU 3 AU 7 FÉVRIER 2025

Révisions - Intégration : voir le contenu dans le programme précédent.

Chapitre 9 - Intégrales : voir l'extrait du programme ci-dessous.

Analyse 2 – Intégrales généralisées

Contenus	**Commentaires**
Convergence d'une intégrale généralisée (ou impropre) d'une fonction continue sur un intervalle I semi-ouvert ou ouvert.	La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive. La terminologie de « fonction intégrable » n'est pas donnée. Les notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ pourront, selon le contexte, désigner l'intégrale généralisée ou sa valeur.
Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sur cet intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.	Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, stricte positivité (f positive non nulle), croissance.	La démonstration de la stricte positivité n'est pas exigible.
Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales généralisées.	On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule.
Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales généralisées.	Si la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.
Cas des fonctions paires ou impaires.	
Théorèmes de convergence pour deux fonctions positives f et g : • théorème par comparaison si $f \leq g$, • si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées en b $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.	Tout autre critère de convergence est hors programme. Tout résultat sur la nature des intégrales de Riemann devra être démontré.

Contenus (suite)	**Commentaires**
Convergence absolue d'une intégrale généralisée.	La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale. Les intégrales semi-convergentes sont hors programme.
L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.	La valeur de cette intégrale est un résultat admis.

La colle débutera par une question de cours, portant (par exemple) sur les définitions ou énoncés suivants, tirées du *rapport du jury* :

- Questions de cours de la semaine précédente.
- Donner la définition de la convergence et convergence absolue d'une intégrale impropre pour une fonction continue sur $[a, +\infty[$.
- Enoncer le théorème de comparaison pour des intégrales impropres de fonctions positives.
- Nature des intégrales impropres suivantes (*résultats à redémontrer systématiquement*) : soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$$