PROGRAMME DE COLLES

SEMAINE 17 : DU 10 AU 14 FÉVRIER 2025

Chapitre 9 - Intégrales : voir le contenu dans le programme de la semaine 16.

Chapitre 10 - Variables aléatoires à densité : début du chapitre, voir l'extrait de programme plus bas.

La colle débutera par une question de cours, portant (par exemple) sur les définitions ou énoncés suivants, tirées du *rapport du jury* :

— Questions de cours de la semaine précédente.
— Définition d'une densité de probabilité.
— Caractérisation d'une variable à densité à partir de sa fonction de répartition.
— Définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.
— Inégalité de Markov.
— Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Contenus	**Commentaires**
a) Variables aléatoires admettant une densité	
On appelle densité de probabilité une fonction f définie sur $\mathbf{R}$, positive, dont l'intégrale généralisée sur $\mathbf{R}$ converge et vaut 1.	Dans le cadre du programme, l'intégrale généralisée n'est définie que pour des fonctions continues sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité s'il existe une densité de probabilité f telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.	Une telle fonction, qui n'est pas unique, est appelée densité de X.
F_X est dérivable en tout point de continuité x de f et $F_X'(x) = f(x)$	Ce résultat peut être admis. Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est justifier que X admet une densité et en donner une.
Si f est une densité de probabilité, alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité.	Résultat admis.

Contenus (suite)	**Commentaires**
X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.	Ce résultat peut être admis. On insistera sur les représentations graphiques de la fonction de densité et de la fonction de répartition, en faisant le lien avec les histogrammes de variables aléatoires finies. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.
b) Indépendance Propriétés de l'indépendance mutuelle : • Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi. • Lemme des coalitions : si $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \ldots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.	On observera que cette propriété peut s'étendre à un nombre fini de fonctions, et en particulier au cas de $(u_1(X_1), u_2(X_2), \ldots, u_n(X_n))$. Exemples de recherche de la loi du minimum et du maximum de deux ou de n variables aléatoires indépendantes.

c) Espérance	
Espérance. Propriétés. Notion de variable centrée.	La linéarité de l'espérance est admise. Par extension, on pourra appliquer la linéarité de l'espérance à des variables aléatoires, qu'elles soient discrètes ou à densité, sans savoir si leur résultante est discrète ou à densité.
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire à densité et u est une fonction définie sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $u(X)$ admet une espérance si, et seulement si, $\int_I u(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Le cas échéant, $E(u(X)) = \int_I u(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.	Résultat admis. On pourra appliquer ce théorème sans savoir si $u(X)$ est une variable aléatoire discrète ou à densité.
Propriétés :	
• Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	On pourra appliquer ce théorème dès lors que la variable aléatoire admet une variance, sans savoir si elle est discrète ou à densité.
• Variance et moments. • Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X. • Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. • Variance de $aX + b$. Notion de variable centrée réduite.	
• Si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.	X^* est appelée variable centrée réduite associée à X.
• Si X et Y sont indépendantes, espérance de XY et variance de $X + Y$.	Résultat sur l'espérance admis. Par extension, on pourra appliquer ces formules à des variables aléatoires, qu'elles soient discrètes ou à densité, sans savoir si leurs résultantes XY et $X+Y$ sont discrètes ou à densité. Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.