

Fiche de révision 2 - Correction

Suites usuelles et récurrences

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Effectuer un raisonnement par récurrence (simple, à deux pas et forte)
- ▷ C2 : Étudier des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux
- ▷ C3 : Déterminer le sens de variation d'une suite, suite majorée, minorée, bornée
- ▷ C4 : Notion de suite convergente (définition « avec les ε »)
- ▷ C5 : Effectuer des opérations sur les limites, limites usuelles (et notamment les croissances comparées)
- ▷ C6 : Utiliser le théorème de comparaison, théorème des gendarmes, théorème de la limite monotone
- ▷ C7 : Utiliser le théorème sur les suites extraites des termes pairs et impairs
- ▷ C8 : Notion de suites adjacentes (et conséquence : des suites adjacentes convergent)
- ▷ C9 : Notion de suites équivalentes (définitions, propriétés et équivalents usuels)
- ▷ C10 : Utiliser le théorème des sommes de Riemann
- ▷ C11 : Écrire une suite (de manière récursive ou non) ou une somme avec `python`

2 Correction des exercices

Exercice 1 (C1)  Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}$$

Montrer par récurrence que la suite est bien définie et que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « U_n est bien défini et $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$ ».

— *Initialisation* : par hypothèse, on a $U_0 = 2$. Ainsi, $\frac{3}{2} \leq U_0 \leq 2$ et en particulier, le premier terme de la suite est bien défini. Donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, U_n existe et est non nul (car compris entre $\frac{3}{2}$ et 2). Le nombre

$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}$ est donc bien défini. De plus, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{U_n} \leq \frac{2}{3}$ puis (en ajoutant 1) :

$$\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

— *Conclusion* : pour tout entier naturel n , la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Ainsi :

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout entier naturel n , on a $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

COMMENTAIRE

Il est nécessaire de faire apparaître dans l'hypothèse de récurrence le fait que le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite soit bien défini. Cela signifie essentiellement que l'on ne divise pas par 0.

Exercice 2 (C1)  Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

On utilise un raisonnement par récurrence à deux pas. Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$ ».

- *Initialisation* : vérifions que les propositions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies. On a $F_1 = 1 < \frac{5}{3}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie. De plus, $F_2 = F_1 + F_0 = 2$ et :

$$F_2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 2 - \frac{25}{9} = -\frac{7}{9} < 0$$

Donc la proposition $\mathcal{P}_2$ est vraie.

- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+2}$. Par hypothèse de récurrence, on a $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$ et $F_{n+1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$. En sommant ces inégalités, on obtient :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{5}{3} + 1\right)$$

c'est-à-dire $F_{n+2} < \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{8}{3}$. Or :

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} - \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{8}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \left[\frac{25}{9} - \frac{8}{3}\right] = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{1}{9} > 0$$

puisque $\left(\frac{5}{3}\right)^n > 0$ et $\frac{1}{9} > 0$. Par conséquent :

$$F_{n+2} < \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(\frac{5}{3} + 1\right) < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.

- *Conclusion* : pour tout entier naturel n , la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence à deux pas.

Ainsi :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Exercice 3 (C1)  On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n u_k$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3n$.

On utilise une récurrence forte. Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $u_n = 3n$ ». La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $u_0 = 0 = 3 \times 0$.

1. *Initialisation* : on a $u_1 = 3 = 3 \times 1$ donc la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.
2. *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les propositions $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ soient vraies. Montrons qu'alors la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence et d'après la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a (puisque $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n 3k = \frac{6}{n} \sum_{k=0}^n k = \frac{6}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1)$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

3. *Conclusion* : pour tout entier naturel n , la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence forte.

Ainsi :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3n$

COMMENTAIRE

Dans l'hérédité, on a besoin de savoir que $n \in \mathbb{N}^*$ pour pouvoir utiliser la relation de récurrence (à cause de la division par n). C'est pourquoi on initialise la récurrence à $n = 1$. On traite alors la proposition $\mathcal{P}_0$ à l'extérieur de la récurrence.

Exercice 4 (C1)  Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Démontrer par récurrence forte que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{P}_n$: « $u_n = 2^{n-1}$ ». Démontrons par récurrence forte que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Initialisation* : par hypothèse, on a $u_1 = u_0 = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$. Donc la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.
2. *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la proposition $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Montrons que cela entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $u_k = 2^{k-1}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n u_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \text{ par hypothèse de récurrence aux rangs } 1, \dots, n \\ &= 1 + 1 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \text{ par somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= 1 - (1 - 2^n) \\ &= 2^n \end{aligned}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

3. *Conclusion* : pour tout entier naturel n , la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence forte.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \geq 1, \text{ on a } u_n = 2^{n-1}.$$

Exercice 5 (C2-C4-C11)  Déterminer le terme général de chacune des suites définies par :

1. $L_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = -2L_n - 3$

La suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\ell = -2\ell - 3 \iff 3\ell = -3 \iff \ell = -1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = L_n - \ell$. On a d'une part $L_{n+1} = -2L_n - 3$ et d'autre part $\ell = -2\ell - 3$. En soustrayant la deuxième équation à la première, il vient :

$$u_{n+1} = L_{n+1} - \ell = -2L_n - 3 + 2\ell + 3 = -2(L_n - \ell) = -2u_n$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = L_0 + 1 = 3$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times (-2)^n = 3(-2)^n$$

puis :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = -1 + 3(-2)^n}$$

2. $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + 3$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3 donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2}$$

3. $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -v_{n-1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = -v_n$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1 . Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times (-1)^n = 4(-1)^n}$$

4. $w_1 = 3$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $w_{k+1} = 5w_k + 1$

La suite $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\ell = 5\ell + 1 \iff -4\ell = 1 \iff \ell = -\frac{1}{4}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $u_k = w_k - \ell$. On a d'une part $w_{k+1} = 5w_k + 1$ et d'autre part $\ell = 5\ell + 1$. En soustrayant la deuxième équation à la première, il vient :

$$u_{k+1} = w_{k+1} - \ell = 5w_k + 1 - 5\ell - 1 = 5(w_k - \ell) = 5u_k$$

La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 5 et on a $u_1 = w_1 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = u_1 \times 5^{k-1} = \frac{13}{4} 5^{k-1}$$

puis :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad w_k = -\frac{1}{4} + \frac{13}{4} 5^{k-1}}$$

5. $a_0 = -5$, $a_1 = 5$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k+1} = 3a_{k-1}$

Pour tout entier naturel k , on a $a_{k+2} = 0 \times a_{k+1} + 3a_{k-1}$. Donc la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique associée est $x^2 = 3$ dont les racines sont $\pm \sqrt{3}$. Ainsi :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = A \left(\sqrt{3} \right)^k + B \left(-\sqrt{3} \right)^k$$

Déterminons les valeurs de A et B . On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_0 &= -5 \\ a_1 &= 5 \end{cases} &\iff \begin{cases} A + B &= -5 \\ A - B &= \frac{5}{\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A &= \frac{1}{2} \left(-5 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \\ B &= \frac{1}{2} \left(-5 - \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{1}{2} \left(-5 + \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \left(\sqrt{3} \right)^k + \frac{1}{2} \left(-5 - \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \left(-\sqrt{3} \right)^k}$$

6. $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = -\sqrt{2}b_{n+1} - b_n$

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique est $x^2 = -\sqrt{2}x - 1$, c'est-à-dire $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$. Ses racines sont $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\pm i \frac{3\pi}{4}}$. Donc :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \left(A \cos \left(n \frac{3\pi}{4} \right) + B \sin \left(n \frac{3\pi}{4} \right) \right) \times 1^n$$

Déterminons les valeurs de A et B . On résout :

$$\begin{cases} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}B &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 0 \\ B &= \sqrt{2} \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sqrt{2} \sin \left(n \frac{3\pi}{4} \right)}$$

7. $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+2} = -c_{n+1} - c_n$

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique associée est $x^2 + x + 1 = 0$ et ses racines sont $\frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$. Donc :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = A \cos \left(n \frac{2\pi}{3} \right) + A \sin \left(n \frac{2\pi}{3} \right)$$

Déterminons les valeurs de A et B . On résout :

$$\begin{cases} c_0 &= 1 \\ c_1 &= \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 1 \\ -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2} &= \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 1 \\ B &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \cos \left(n \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(n \frac{2\pi}{3} \right)}$$

8. $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 2$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $x_{\ell+2} = 2\sqrt{3}x_{\ell+1} - 4x_\ell$
 La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique associée est $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$. Le discriminant vaut -4 donc les racines (complexes conjuguées distinctes) valent :

$$\frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad \text{et} \quad 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Donc :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \left(A \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + B \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) \right) 2^n$$

Déterminons les valeurs de A et B . On résout :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{3}A + B = \sqrt{3} \\ A + \sqrt{3}B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) 2^n}$$

9. $T(0) = 1$, $T(1) = 3\sqrt{2}$ et pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, $T(t+1) = 3\sqrt{2}T(t) + 9T(t-1)$
 La suite $(T(t))_{t \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique associée est $x^2 - 3\sqrt{2}x - 9 = 0$. Le discriminant vaut 54 et les racines (réelles distinctes) sont :

$$\frac{3\sqrt{2} \pm 3\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}(1 \pm \sqrt{3})}{2}$$

Donc il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad T(t) = A \left(\frac{3}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{3}) \right)^t + B \left(\frac{3}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}) \right)^t$$

Déterminons les valeurs de A et B . On résout :

$$\begin{aligned} \begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 3\sqrt{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} A + B = 1 \\ (1 - \sqrt{3})A + (1 + \sqrt{3})B = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ -A + B = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{N}, \quad T(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{3}) \right)^t + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}) \right)^t}$$

10. $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 16$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\theta_{n+1} = 4\theta_n - 4\theta_{n-1}$
 La suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique est $x^2 - 4x + 4 = 0$. Celle-ci admet une seule racine qui est $x = 2$, d'ordre de multiplicité 2, donc :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \theta_n = (An + B)2^n$$

Déterminons les valeurs de A et B . On résout :

$$\begin{cases} \theta_1 = 2 \\ \theta_2 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 3 \\ B = -2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \theta_n = (3n - 2)2^n}$$

11. (a) Écrire une fonction **python** prenant en entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de x_n .
Le plus simple est d'écrire une fonction récursive (mais on peut aussi utiliser une boucle **for**) :

```
from math import sqrt
def x(n) :
    if (n==1) :
        return sqrt(3)
    elif (n==2) :
        return 2
    else :
        return 2*sqrt(3)*x(n-1)-4*x(n)
```

- (b) Écrire un script qui demande à l'utilisateur un nombre positif M et qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle $x_n > M$.

On utilise une boucle **while** et la fonction précédente.

```
def depasse(M) :
    n = 0
    while (x(n) <= M) :
        n = n+1
    return n
```

Exercice 6 (C3) Étudier les variations de la suite :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{n^2}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Comme $(n+1)! = (n+1)n!$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} - \frac{n^2}{n!} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)n^2}{(n+1)!} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^3 - n^2}{(n+1)!} \\ &= \frac{-n^3 + 2n + 1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Une racine du trinôme $-X^3 + 2X + 1$ est -1 donc celui-ci est divisible par $X + 1$. On a :

$$-X^3 + 2X + 1 = -(X+1)(X^2 - X - 1)$$

Les racines du trinôme $-X^3 + 2X + 1$ sont donc -1 et $\omega_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	ω_-	ω_+	$+\infty$		
$-(X+1)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		
X^2-X-1	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-X^3+2X+1$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Or $\omega_+ \leq \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$ donc, pour tout $n \geq 2$, on obtient donc que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Par conséquent :

la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

COMMENTAIRE

- On factorise l'expression $-n^3 + 2n + 1$ pour en déterminer le signe en fonction de n . Comme -1 est racine de $-X^3 + 2X + 1$, on peut le factoriser par $X - (-1)$. Si on ne sait pas trouver *de tête* la factorisation du polynôme, on peut tout à fait chercher $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $-X^3 + 2X + 1 = (X + 1)(aX^2 + bX + c)$ (on développe et on procède par identification).
- La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas monotone. Comme $\omega_+ > 1$, on obtient que $u_1 > u_2$ puis la suite est décroissante à partir du rang 2.

2. $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(t)^{n+1} - \tan(t)^n) dt = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n (\tan(t) - 1) dt$$

Or la fonction tangente est croissante et positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \tan(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \tan(t) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

et donc :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \tan(t)^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \tan(t) \leq 1$$

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a donc $\tan(t)^n (\tan(t) - 1) \leq 0$. Par positivité de l'intégrale, il vient donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Finalement :

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

3. $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $a_k = k - 2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$a_{k+1} - a_k = k + 1 - 2^{k+1} - (k - 2^k) = 1 + 2^k - 2 \times 2^k = 1 - 2^k \leq 0$$

puisque $2^k \geq 2^0$. Donc :

la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante

4. $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en montrant préalablement que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Admettons provisoirement que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x \tag{2.1}$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\frac{1}{n+1} \geq -\frac{1}{2}$ et donc $-\frac{1}{n+1} \in]-1, +\infty[$. En appliquant (1) en $x = -\frac{1}{n+1}$, il vient :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

puis $h_{n+1} - h_n \leq 0$ et donc :

la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

Démontrons maintenant l'inégalité (1). La fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ par somme et composition et :

$$\forall x > -1, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Donc :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

La limite de f en -1^+ est évidente. Quant à la limite en $+\infty$, il suffit de factoriser par x dans le logarithme puis par x dans l'expression de f pour faire apparaître des croissances comparées.

Pour tout $x \in] -1, +\infty[$, on a $f(x) \geq 0$ et donc $x - \ln(1+x) \geq 0$, ce qui démontre (1).

Exercice 7 (C5) Déterminer la limite des suites de termes généraux suivants :

1. $s_n = n^2 - n \cos(n) + 12$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $s_n = n^2 \left(1 - \frac{\cos(n)}{n} + \frac{12}{n^2} \right)$ et $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc (puisque $n > 0$), il vient

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \pm \frac{1}{n} = 0. \text{ donc (d'après le théorème des gendarmes) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0.$$

Comme de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{n^2} = 0$, on peut conclure (par somme et produit) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$$

COMMENTAIRE

On peut aussi utiliser le théorème de comparaison (l'idée est que le terme prépondérant est n^2). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\cos(n) \leq 1$ et donc $s_n \geq n^2 - n + 12$. Il reste alors à montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n + 12) = +\infty$ et à invoquer le théorème de comparaison.

2. $t_n = \frac{n + e^{-n} + \ln(n)}{\sqrt{n} + 2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$t_n = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n e^n} + \frac{\ln(n)}{n} \right)}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)} = \sqrt{n} \times \frac{1 + \frac{1}{n e^n} + \frac{\ln(n)}{n}}{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n}}_{\text{croissances comparées}} = 0$$

Par quotient et produit, on peut conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

COMMENTAIRE

On mentionne les croissances comparées quand on les utilise.

3. $u_n = n \ln \left(\frac{n+1}{n-1} \right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$u_n = n \ln \left(\frac{(n-1)+2}{n-1} \right) = n \ln \left(1 + \frac{2}{n-1} \right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ donc :

$$\ln \left(1 + \frac{2}{n-1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

et donc, par produit, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

4. $v_n = \frac{\ln \left(\cos \left(\frac{3}{n} \right) \right)}{\sin(e^{-n})}$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\sin(e^{-n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$.

De plus :

$$\begin{aligned} \ln \left(\cos \left(\frac{3}{n} \right) \right) &= \ln \left[1 + \left(\cos \left(\frac{3}{n} \right) - 1 \right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos \left(\frac{3}{n} \right) - 1 \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(\frac{3}{n} \right) - 1 \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-9}{2n^2} \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \end{aligned}$$

En quotientant les équivalents, il vient :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-9e^n}{2n^2}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-9e^n}{2n^2} = -\infty$ par croissances comparées donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty}$$

COMMENTAIRE

Les équivalents usuels sont valides seulement si la suite mise en jeu est convergente de limite 0. Par exemple :

$$1 - \cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2} \quad \text{car } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

5. $w_n = 3^n - e^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{e}{3}\right)^n\right)$. Or $0 < e < 3$ donc $\frac{e}{3} \in]-1, 1[$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = 0$. Comme de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$$

6. $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + 2k \ln(n)}$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $2 \ln(n) > 0$, on a :

$$n^2 + 2 \ln(n) \leq n^2 + 2k \ln(n) \leq n^2 + 2n \ln(n)$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\frac{1}{n^2 + 2n \ln(n)} \leq \frac{1}{n^2 + 2k \ln(n)} \leq \frac{1}{n^2 + 2 \ln(n)}$$

En sommant les inégalités et en utilisant la linéarité de la somme, il vient :

$$\frac{1}{n^2 + 2n \ln(n)} \sum_{k=1}^n 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + 2k \ln(n)} \leq \frac{1}{n^2 + 2 \ln(n)} \sum_{k=1}^n 1$$

soit :

$$\frac{1}{n + 2 \ln(n)} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2 + 2 \ln(n)}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 2 \ln(n)}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + 2 \ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 2 \frac{\ln(n)}{n}} = 0$ (en utilisant les croissances comparées) donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

7. $y_n = \left(1 + \frac{1}{e^n}\right)^{n^2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n = e^{n^2 \ln(1 + e^{-n})}$. Or $\ln(1 + e^{-n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et donc, par produit :

$$n^2 \ln(1 + e^{-n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 e^{-n}$$

Par croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(1 + e^{-n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-n} = 0$$

Par composition des limites, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

COMMENTAIRE

Une limite du type « 1^∞ » est une forme indéterminée. Pour la lever, on écrit l'expression sous forme exponentielle puis on utilise la limite de l'expression dans l'exponentielle en utilisant l'équivalent usuel du logarithme. On compose finalement les limites (**pas les équivalents**).

8. $z_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (puisque $|n| = n$ car $n > 0$) :

$$z_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0$ donc :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

puis, par produit :

$$z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}}$$

COMMENTAIRE

On peut s'affranchir des équivalents usuels en utilisant l'expression conjuguée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \dots$$

Exercice 8 (C9)  Donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $u_n = n + \ln(n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = n \left(1 + \frac{\ln(n)}{n} \right)$. Par croissances comparées, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

donc $1 + \frac{\ln(n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. Par produit, $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n}$.

2. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{\ln(n)}$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{\ln(n)} \left(1 + \frac{\ln(n)}{n} \right)$$

donc, en utilisant le même argument qu'à la question 1., on obtient $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}}$.

3. $u_n = \frac{n^2 + n\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$u_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)} = n \times \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (il suffit d'encadrer $(-1)^n$ et d'appliquer le théorème des gendarmes) donc le quotient tend vers 1 puis, par produit :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n}$$

4. $u_n = \frac{n^2 + 2^{-n} + 3^n}{n! + n^{12} + 1}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n^2 + 2^{-n} + 3^n = 3^n \left(1 + \frac{1}{6^n} + \frac{n^2}{3^n} \right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ par croissances comparées donc :

$$n^2 + 2^{-n} + 3^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi :

$$n! + n^{12} + 1 = n! \left(1 + \frac{n^{12}}{n!} + \frac{1}{n!} \right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{12}}{n!} = 0$ par croissances comparées donc :

$$n! + n^{12} + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$$

Finalement, par quotient :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3^n}{n!}}$$

5. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et donc :

$$u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{n-1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Ainsi, $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}}$.

6. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

et donc $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Ainsi, $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^4}}$.

COMMENTAIRE

- On rappelle que, pour tout entier naturel n ,

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

- Le premier terme d'un développement limité fournit un équivalent.

Exercice 9 (C3-C10)  On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$$

1. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, en utilisant le changement d'indice $\ell = k + 1$ dans la première somme, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{\ell=1}^{n+2} \frac{1}{n+\ell} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

puisque les sommes sont télescopiques. On en déduit donc que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi :

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\ln$ est continue sur l'intervalle $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $c \in]k, k+1[$ tel que :

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

Or $k \leq c \leq k+1$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{k}$$

En particulier, on a bien $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geq \ln(2)$. Conclure quant à la convergence de la suite.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2.(a), on sait que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a (puisque alors $n+k \geq 1$) :

$$\frac{1}{n+k} \geq \ln(n+k+1) - \ln(n+k)$$

et donc, en sommant les inégalités :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} \geq \sum_{k=0}^n (\ln(n+k+1) - \ln(n+k))$$

c'est-à-dire :

$$u_n \geq \ln(2n+1) - \ln(n) \quad \text{soit encore} \quad u_n \geq \ln(2) + \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \geq \ln(2)$$

puisque $\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \geq 0$ (en effet, $n + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \geq 1$ et on sait que la fonction $\ln$ est à valeurs positives sur $[1, +\infty[$). Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \ln(2)$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par $\ln(2)$ donc, d'après le théorème de la limite monotone :

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente

3. En reconnaissant une somme de Riemann, donner la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (en isolant le dernier terme et factorisant par n dans le sommant) :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\text{noté } v_n} + \frac{1}{2n}$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite de sommes de Riemann de la fonction f donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 f(x) \, dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2)$$

Comme par ailleurs $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, on peut conclure par somme que :

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\ln(2)$

COMMENTAIRE

- Les sommes de Riemann d'une fonction vont soit de 0 à $n-1$, soit de 1 à n . C'est pourquoi on a isolé le dernier terme de u_n pour pouvoir appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.
- On a obtenu à la question 2.(b) que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On ne s'en sert pas dans la question 3. car le théorème sur les sommes de Riemann garantit la convergence de la suite (tout comme le théorème des gendarmes).

Exercice 10 (C10)  Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :

1. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+k}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$. Donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann de la fonction f . Comme f est continue sur $[0, 1]$, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge de limite :

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \, dx = \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

méthode du +1-1

Finalement :

la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $1 - \ln(2)$

COMMENTAIRE

Quand on utilise le théorème sur les sommes de Riemann, il ne faut pas oublier de mentionner que la fonction f mise en jeu est continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. $b_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2 x^2}$ (où $x \in \mathbb{R}^*$)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$b_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}x\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : t \mapsto \frac{1}{1 + (xt)^2}$. Donc $(b_n(x))_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann de la fonction f . Comme f est continue sur $[0, 1]$, la suite $(b_n(x))_{n \geq 1}$ converge de limite :

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \int_0^1 \frac{1}{x} \times \frac{x}{1 + (xt)^2} \, dt = \left[\frac{\arctan(xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{\arctan(x)}{x}$$

Finalement :

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la suite $(b_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\frac{\arctan(x)}{x}$

3. $c_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $c_n > 0$, le nombre $d_n = \ln(c_n)$ est bien défini et vaut :

$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Donc $(d_n)_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann de la fonction f qui est continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann, la suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 f(x) dx$. Cette intégrale vaut $2 \ln(2) - 2$ (il suffit de faire une intégration par parties). Par composition des limites, on trouve donc que :

la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $e^{2 \ln(2) - 2} = \frac{4}{e^2}$

4. $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Donc $(d_n)_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann associée à la fonction f qui est continue sur $[0, 1]$. Par conséquent :

la suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 f(x) dx = \left[\sqrt{1+x} \right]_0^1 = \sqrt{2}$

Exercice 11 (C6-C9) ☞ Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \quad \binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ et $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$. On a :

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-1-2k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

Par conséquent :

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} \geq 0 \iff n-1-2k \geq 0 \iff k \leq \frac{n-1}{2}$$

Cela implique que la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}}$ est croissante tandis que la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{\frac{n-1}{2} \leq k \leq n-2}$ est décroissante. Par ailleurs, on sait que :

$$\forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

On en déduit donc que le plus petit coefficient binomial $\binom{n}{k}$ pour $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$ est $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \quad \binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}}$$

2. En déduire un encadrement de u_n pour tout entier n supérieur ou égal à 4.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$. D'après la question 1. et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait que :

$$\forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \quad 0 \leq \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{2}{n(n-1)}$$

Or, par linéarité de la somme :

$$u_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

En sommant les inégalités précédentes, il vient $2 + \frac{2}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n-2} 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \quad 2 + \frac{2}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}} \quad (*)$$

3. Conclure quant à la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

En utilisant le théorème d'encadrement, on obtient finalement que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 4} \text{ (et donc la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente de limite 2)}$$

4. Montrer que $u_n - 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

D'après les inégalités (*) précédemment obtenues, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \quad \frac{2}{n} \leq u_n - 2 \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

ce qui donne, en divisant par $\frac{2}{n} > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \quad 1 \leq \frac{u_n - 2}{\frac{2}{n}} \leq \frac{n-3}{n-1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-3}{n-1} = 1$ (en factorisant par n), on conclut du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 2}{\frac{2}{n}} = 1$. Par conséquent :

$$\boxed{u_n - 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}}$$

Exercice 12 (C3-C6)  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

On trouve $\boxed{u_1 = \ln(2) \text{ et } u_2 = \frac{\pi}{4}}$.

2. (a) Étudier le sens de variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$ car $x^n \geq 0$, $1-x \geq 0$ et $(1+x^n)(1+x^{n+1}) \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale, il vient $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Finalement :

$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

- (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^n \geq 0$ puis $1+x^n \geq 1$ et enfin, par passage à l'inverse $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$ (car la fonction inverse est décroissante sur

$\mathbb{R}_+^*$). Par croissance de l'intégrale, il vient $u_n \leq \int_0^1 1 dx$, c'est-à-dire $u_n \leq 1$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 1) donc, d'après le théorème de la limite monotone :

$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après la question 2b que $1 - u_n \geq 0$. De plus, par linéarité de l'intégrale :

$$1 - u_n = \int_0^1 1 \, dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) \, dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \, dx$$

On a vu à la question 2b que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$ et donc $\frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$ (en multipliant par $x^n \geq 0$). Par croissance de l'intégrale :

$$1 - u_n \leq \underbrace{\int_0^1 x^n \, dx}_{= \frac{1}{n+1}}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ la suite $(1 - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 0 d'après le théorème des gendarmes. Par linéarité de la limite, on obtient donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$.

4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3, on a :

$$1 - u_n = \int_0^1 \frac{x}{n} \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \, dx$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, posons :

$$u'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \quad v(x) = \frac{x}{n}$$

et :

$$u(x) = \ln(1+x^n) \quad v'(x) = \frac{1}{n}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$ donc on peut intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$1 - u_n = \left[\frac{x}{n} \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx}$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \frac{1}{n+1}$.

On montre facilement que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ (par exemple par une étude de fonctions). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^n \in \mathbb{R}_+$ et donc $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

(c) En déduire un équivalent simple de $1 - u_n$ quand n tend vers $+\infty$.

En utilisant les questions 4a et 4b, on obtient :

$$\frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \leq 1 - u_n \leq \frac{\ln(2)}{n}$$

En divisant par $\frac{\ln(2)}{n} > 0$, il vient :

$$1 - \frac{1}{\ln(2)(n+1)} \leq \frac{nu_n}{\ln(2)} \leq 1$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\ln(2)(n+1)}\right) = 1$ donc, d'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{\ln(2)} = 1$.

Par définition des suites équivalentes, on peut conclure que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$$

Exercice 13 (oral Agro-Véto 2017, C7-C8-C11)  Pour tout entier naturel n non nul, on pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Démontrer que les suites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite.

Montrons que les suites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = s_{2n+2} - s_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$

Or $2n+1$ est impair donc $(-1)^{2n+1} = -1$ tandis que $2n+2$ est pair donc $(-1)^{2n+2} = 1$. Ainsi :

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 0$$

Donc la suite $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} s_{2(n+1)+1} - s_{2n+1} &= s_{2n+3} - s_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \geq 0 \end{aligned}$$

et donc la suite $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Par ailleurs,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n+1} = 0$$

On en déduit que les suites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes :

les suites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite

COMMENTAIRE

Il n'est pas demandé ici de trouver la limite de ces suites. Le théorème sur les suites extraites stipule que deux suites adjacentes sont nécessairement convergentes de même limite.

2. En déduire que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Les suites extraites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite d'après la question 1. D'après le théorème sur les suites extraites :

la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est convergente

COMMENTAIRE

On rappelle le théorème relatif aux suites extraites. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente} \iff \begin{cases} (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente} \\ (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$$

On en déduit en particulier que si au moins l'une des deux suites extraites diverge ou si les deux suites extraites convergent de limites différentes, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

3. (a) Écrire en langage `python` une fonction `somme` prenant en paramètre un entier naturel n non nul et renvoyant la somme s_n .

La structure pour calculer une somme est toujours la même :

```
def somme(n) :  
    S = 0  
    for k in range (1,n+1) :  
        S = S+(-1)**k/k  
    return S
```

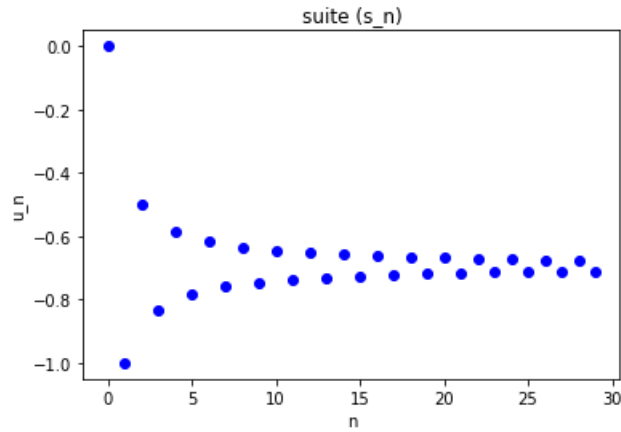
COMMENTAIRE

On rappelle que si a et b sont des entiers tels que $a < b$, alors l'intervalle $[[a, b]]$ correspond à `range(a,b+1)` dans `python`.

- (a) À l'aide du module `matplotlib.pyplot`, tracer une représentation de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Le script suivant permet de générer les 30 premiers termes de la suite (par exemple) :

```
import matplotlib.pyplot as plt  
plt.plot([somme(k) for k in range(30)],"bo")  
plt.title("suite (s_n)")  
plt.xlabel("n")  
plt.ylabel("u_n")  
plt.show()
```

On obtient le graphique ci-dessous :



On retrouve sur le graphique les monotonies et convergences des deux suites extraites (vers la même limite).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, +\infty[$. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$ (puisque $x \neq -1$) donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k &= \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-1)^n x^n}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x} \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

COMMENTAIRE

Cette question ne doit pas poser de problème, la somme qui apparaît étant usuelle. Il ne faut pas oublier de signaler que la raison est bien différente de 1.

4.(b) En déduire alors que :

$$\ln(2) = -s_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions mises en jeu dans l'égalité de la question 4.(a) sont continues sur le segment $[0, 1]$ donc on peut considérer leurs intégrales sur $[0, 1]$. En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \right) dx + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^n}{1+x} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx$. On a :

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

En utilisant le changement d'indice $\ell = k + 1$, il vient :

$$\alpha = \sum_{\ell=1}^n \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{-1} \frac{(-1)^\ell}{\ell} = -s_n$$

Par ailleurs,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

Finalement :

$$\boxed{\ln(2) = -s_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx}$$

4.(c) Démontrer les inégalités :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1+x \geq 1$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ et comme $x^n \geq 0$, on obtient par produit :

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

Or $\int_0^1 0 dx = 0$ et $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ (cf. calculs de la question 4.(b)) d'où :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}}$$

COMMENTAIRE

Pour encadrer une intégrale, il suffit d'encadrer la fonction sous l'intégrale puis d'utiliser la croissance de l'intégrale.

5. Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc, en utilisant l'encadrement obtenu à la question 4.(c), il vient :

$$-\frac{1}{n+1} \leq (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pm 1}{n+1} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

D'après la question 4.(b), il vient alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-s_n) = \ln(2)$ et donc, finalement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\ln(2)}$$

Exercice 14 (C3-C6)  Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3}$$

1. Démontrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0.$$

2. On définit la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$

(a) Étudier les variations de f .

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2}{3}x$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$

(b) Étudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x .

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - x = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 2) = \frac{1}{3}(x-1)(x-2)$$

donc on obtient le tableau de signes suivant :

x		1		2	
$f(x) - x$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$

3. On suppose que $u_1 > 2$.

(a) Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $u_1 > 2$, on montre par récurrence que :

$$\forall n > 0, u_n > 2$$

En effet, c'est vrai si $n = 1$, et si $u_n > 2$, puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $u_{n+1} = f(u_n) > f(2) = 2$.

(b) En déduire que (u_n) est croissante à partir du rang 1.

Ensuite, par (3a), on a

$$u_n > 2 \text{ donc } u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$$

(c) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On sait que si (u_n) converge, sa limite l vérifie $l = f(l)$, et donc $l = 1$ ou $l = 2$. La suite (u_n) étant croissante de premier terme $u_1 > 2$, elle ne peut converger vers 1 ou 2. Elle diverge donc et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

4. On suppose que $1 < u_1 < 2$.

(a) Montrer que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

On montre par récurrence que $1 < u_n < 2$: c'est vrai pour $n = 1$ et si $1 < u_n < 2$, f étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(1) < f(u_n) < f(2) \text{ donc } 1 < u_{n+1} < 2$$

On en déduit par 2.b) que

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$$

et la suite est décroissante.

(b) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(u_n) étant décroissante et minorée par 1, elle converge ; sa limite étant 1 ou 2, on a

$$\lim u_n = 1$$

car $u_n \leq u_1 < 2$ entraîne que $l \leq u_1 < 2$.

5. On suppose que $0 < u_1 < 1$.

(a) Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 1.

On utilise toujours la même méthode : $0 < u_n < 1$ par récurrence et par 2.b)

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$$

(b) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

La suite est croissante majorée par 1, donc elle converge vers 1 ou 2 et $u_n < 1$ entraîne $l \leq 1$; on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

6. Que se passe-t-il si $u_1 = 1$ et si $u_1 = 2$?

Si $u_1 = 1$, on a $u_n = 1$ par récurrence et la suite est stationnaire ; de même si $u_1 = 2$, $u_n = 2$ et la suite est stationnaire.

Exercice 15 (C1-C3-C6) ☞ On considère la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]0, 1]$.

On utilise un raisonnement par récurrence. Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $u_n \in]0, 1]$ ».

— *Initialisation* : la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $u_0 \in]0, 1[$ par hypothèse.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons alors que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a $u_n \in]0, 1]$ donc $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il vient :

$$\sin(0) < \sin(u_n) \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_{n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Autrement dit, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

— *Conclusion* : pour tout entier naturel n , la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]0, 1]$.

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leq x$$

En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il suffit d'étudier la fonction $f : x \mapsto x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis (appliqué entre 0 et x , où x est fixé, à la fonction sinus).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_n \in]0, 1]$ donc en particulier $u_n \in \mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité précédente, il vient $\sin(u_n) \leq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$. Donc :

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis établir que sa limite est nulle.

On sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est minorée par 0 (d'après la question 1.). D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Notons ℓ la limite de cette suite. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et, par continuité de la fonction sinus au point ℓ (elle est continue sur $\mathbb{R}$), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(u_n) = \sin(\ell)$. On obtient donc $\sin(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$. De plus, on sait que $\ell \in [0, 1]$ car il s'agit de la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes appartiennent à l'intervalle $]0, 1]$. Comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (donc en particulier sur $[0, 1]$) et puisque $f(0) = 0$, on a nécessairement $\ell = 0$. Finalement :

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 0

4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3}$ en utilisant un développement limité.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a :

$$u_{n+1} = \sin(u_n) \underset{+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

puis :

$$u_{n+1}^2 \underset{+\infty}{=} u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^2 \underset{+\infty}{=} u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2) \right)$$

et donc :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2} \times \frac{1}{1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2) \right) = 0$ donc :

$$\frac{1}{1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)$$

Ainsi, $\frac{1}{u_{n+1}^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + o(1)$. Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + o(1) \right) = \frac{1}{3}$$

Exercice 16 (C6)  On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2} \arctan(x) - x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto 1 + \frac{1}{2} \arctan(x)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f . Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution que l'on notera a , et que $a \in [0, \sqrt{3}]$.

La fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} - 1 = \frac{-1-2x^2}{2(1+x^2)} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, f est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $\arctan$ admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$ (égales à $-\pi/2$ et $\pi/2$ respectivement) donc, d'après les opérations sur les limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\infty$

Comme $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ (notée a) d'après le théorème de la bijection. Autrement dit :

$$\text{l'équation } g(x) = x \text{ admet une unique solution } a \text{ dans } \mathbb{R}$$

De plus, $f(0) = 1 \geq 0$ tandis que :

$$f(\sqrt{3}) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = 1 + \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} < 0$$

On a donc $f(0) \geq f(a) \geq f(\sqrt{3})$. Comme la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on a $0 \leq a \leq \sqrt{3}$. Finalement, $a \in [0, \sqrt{3}]$.

2. On définit maintenant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le premier terme u_0 est un nombre réel quelconque).
- (a) Déterminer les limites finies éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente. Notons ℓ sa limite. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et, comme la fonction g est continue au point ℓ (elle est continue sur $\mathbb{R}$), on a par composition des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = g(\ell)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence, on obtient donc $g(\ell) = \ell$ ce qui implique que $\ell = a$ d'après la question 1. Ainsi :

sous l'hypothèse que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite est nécessairement a

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - a = g(u_n) - g(a)$ par définition de a . Posons $a = \min(a, u_n)$ et $b = \max(a, u_n)$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $u_{n+1} - a = g'(c)(u_n - a)$ et donc :

$$|u_{n+1} - a| = |g'(c)| |u_n - a| = \underbrace{\frac{1}{2(1+c^2)}}_{\geq 0} |u_n - a|$$

Or $1 + c^2 \geq 1$ donc $2(1 + c^2) \geq 2$ et, en utilisant la décroissance de la fonction inverse, on obtient $g'(c) \leq \frac{1}{2}$. On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$$

- (c) En déduire que $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - a|$ pour tout entier naturel n . Que peut-on dire de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Il suffit de faire une récurrence (simple) en considérant, pour tout entier naturel n , la proposition :

$$\mathcal{P}_n : \ll |u_n - a| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - a| \gg$$

- *Initialisation* : la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque les deux membres mis en jeu dans l'inégalité sont égaux (à $|u_0 - a|$).
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. D'après la question précédente, on a :

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$$

De plus, par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - a| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - a|$. En multipliant par $\frac{1}{2} \geq 0$, on obtient :

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} |u_0 - a| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - a|$$

Autrement dit, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- *Conclusion* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$-\frac{1}{2^n} |u_0 - a| \leq u_n - a \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - a|$$

puis :

$$a - \frac{1}{2^n} |u_0 - a| \leq u_n \leq a + \frac{1}{2^n} |u_0 - a|$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a \pm \frac{1}{2^n} |u_0 - a| \right) = a$ donc, d'après le théorème d'encadrement :

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite a

Exercice 17 (C1-C3-C6-C9)  Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère l'équation :

$$x^n + x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (E_n)$$

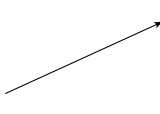
1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = nx^{n-1} + 2x + 2 \geq 2 > 0$$

On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ (par somme). On a le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
f_n	-1	$+\infty$



De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \in f(\mathbb{R}_+) = [-1, +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution d'après le théorème de la bijection. Ainsi :

l'équation (E_n) admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}_+$

2. Montrer que $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On a $f_n(0) = -1 \leq 0$ et :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4} \geq 0$$

Ainsi, $f_n(0) \leq f_n(u_n) \leq f_n\left(\frac{1}{2}\right)$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. Ainsi

$$u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

3. (a) Écrire une fonction **balayage** qui prend en entrée un entier $n \geq 3$ et un nombre **eps** strictement positif et qui renvoie un encadrement de u_n à **eps** près à l'aide d'un procédé de balayage.

On utilise une boucle **while** :

```
def balayage(n,eps) :
    x = 0
    while (x**n+x**2+2*x-1 < 0) :
        x = x+eps
    return x-eps, x
```

- (b) On rappelle le principe de dichotomie. Si une fonction f s'annule une unique fois sur un intervalle $[a, b]$, alors on construit la suite de segments $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ c_n & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$

où c_n est le milieu du segment $[a, b]$. Écrire une fonction **dichotomie** prenant un nombre strictement positif **eps** et renvoyant un encadrement de u_n à **eps** près à l'aide de ce procédé.

On commence par générer la fonction f_n .

```
def fn(x)
    return x**n+x**2+2*x-1
```

On utilise également une boucle **while** :

```

def dichotomie(n,eps) :
    a = 0
    b = 0.5
    while (b-a > eps) :
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) < 0 :
            b = c
        else :
            a = c
    return a, b

```

4. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$$

car $x-1 \leq 0$ et $x^n \geq 0$. Pour $x = u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on obtient $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \leq 0$. Or $f_n(u_n) = 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \leq 0$. De plus, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $u_n \leq u_{n+1}$. Ainsi :

la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est croissante

5. Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente et calculer sa limite.

On sait que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est croissante et qu'elle est majorée par $\frac{1}{2}$. On en conclut donc qu'elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad u_n^n + u_n^2 + 2u_n - 1 = 0 \quad (2.2)$$

De plus, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad 0 \leq u_n^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. D'après le théorème des gendarmes, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (2), on obtient alors l'équation du second degré $\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$ dont les racines sont $\sqrt{2} - 1 > 0$ et $-1 - \sqrt{2} < 0$. Comme tous les termes de la suites appartiennent à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, sa limite ℓ appartient aussi à cet intervalle. En particulier, $\ell \geq 0$ et donc $\ell = \sqrt{2} - 1$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2} - 1$.

6. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose $v_n = u_n - \sqrt{2} + 1$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad v_n = \frac{-u_n^n}{u_n + \sqrt{2} + 1}$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nv_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_n(u_n + \sqrt{2} + 1) &= (u_n - \sqrt{2} + 1)(u_n + \sqrt{2} + 1) = u_n^2 + 2u_n + (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \\ &= u_n^2 + 2u_n - 1 \\ &= -u_n^n \end{aligned}$$

d'après (2). En divisant par $u_n + \sqrt{2} + 1 \neq 0$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad v_n = \frac{-u_n^n}{u_n + \sqrt{2} + 1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. D'après ce qui précède :

$$nv_n = \frac{-nu_n^n}{u_n + \sqrt{2} + 1}$$

Comme $u_n \geq 0$, on a $u_n + \sqrt{2} + 1 \geq 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$0 \leq \frac{1}{u_n + \sqrt{2} + 1} \leq 1$$

On a vu à la question 5 que $0 \leq u_n^n \leq \frac{1}{2^n}$ donc $-\frac{n}{2^n} \leq -nu_n^n \leq 0$. En multipliant les inégalités, on obtient :

$$-\frac{n}{2^n} \leq nv_n \leq 0$$

Comme $2 > 1$, on sait par croissances comparées que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{2^n} = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (nv_n)_{n \geq 3} \text{ est convergente de limite } 0}$$

(b) Montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{(\sqrt{2}-1)^n}{2\sqrt{2}}$.

Tout d'abord,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + \sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} \quad \text{donc} \quad u_n + \sqrt{2} + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{2}$$

Il reste à démontrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\sqrt{2}-1)^n$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{\sqrt{2}-1} \right)^n = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, on a :

$$\left(\frac{u_n}{\sqrt{2}-1} \right)^n = e^{n \ln \left(\frac{u_n}{\sqrt{2}-1} \right)}$$

et :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{u_n}{\sqrt{2}-1} \right) &= \ln \left(1 + \left[\frac{u_n}{\sqrt{2}-1} - 1 \right] \right) = \ln \left(1 + \frac{u_n - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}-1} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{v_n}{\sqrt{2}-1} \right) \end{aligned}$$

Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\sqrt{2}-1} = 0$ donc $\ln \left(1 + \frac{v_n}{\sqrt{2}-1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{\sqrt{2}-1}$ puis :

$$n \ln \left(\frac{u_n}{\sqrt{2}-1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nv_n}{\sqrt{2}-1}$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(\frac{u_n}{\sqrt{2}-1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nv_n}{\sqrt{2}-1} = 0$$

d'après la question 6.(a). Par composition des limites, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{\sqrt{2}-1} \right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

En quotientant les équivalents, on obtient finalement :

$$\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{(\sqrt{2}-1)^n}{2\sqrt{2}}}$$

COMMENTAIRE

Lorsque $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a aussi $a_n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n^k$ (l'exposant k ne dépend pas de n). En général, cette propriété est fautive si l'exposant dépend de n ... Il faut revenir à la définition des suites équivalentes. Il est ici crucial de savoir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nv_n = 0$ pour conclure.