

TD 1 - Séries numériques

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Connaître les séries usuelles :
 - série géométrique et ses dérivées
 - série exponentielle (et ses variantes avec changements d'indices)
 - séries de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$
- ▷ C2 : Calculer la somme d'une série comme combinaison linéaire des séries usuelles.
- ▷ C3 : Démontrer la convergence d'une série et calculer sa somme à l'aide d'une somme télescopique.
- ▷ C4 : Démontrer la convergence ou la divergence d'une série à termes positifs par critère des équivalents ou de comparaison
- ▷ C5 : Utiliser la convergence absolue d'une série pour montrer sa convergence.

Exercice 1 (C1-C2-C3)  Préciser la nature de chacune des séries suivantes et calculer la somme en cas de convergence.

$$1. \sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad 5. \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n!} \qquad 9. \sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$2. \sum_{n \geq 1} \frac{e^n}{n^2} \qquad 6. \sum_{n \geq 3} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \qquad 10. \sum_{n \geq 1} \frac{(-2)^n}{3n!}$$

$$3. \sum_{n \geq 1} e^{-n} \qquad 7. \sum_{n \geq 0} n^2 e^{-3n} \qquad 11. \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2}$$

$$4. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \qquad 8. \sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \qquad 12. \sum_{n \geq 0} \frac{2n+1}{4^n n!}$$

13.(a) Écrire une fonction **sommepartielle** qui génère la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2}$.

(b) Représenter graphiquement la suite $\left(\frac{S_n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$ à l'aide de l'outil informatique. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Exercice 2 (C4-C5)  Déterminer si les séries suivantes sont convergentes.

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad 4. \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$2. \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)}{4^n} \qquad 5. \sum_{n \geq 1} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$3. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2 + \cos(n)^2}$$

Exercice 3 (C4-C5)  Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1. Préciser les nombres réels α et β tel que l'on ait le développement asymptotique suivant :

$$n^2 \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \alpha n + \beta + o(1)$$

2. En déduire qu'il existe un nombre réel C à déterminer tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{-n}$.

3. La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 4 (C1-C2)  Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3u_{n+2} + \frac{u_{n+1}}{2} - \frac{u_n}{2} = 0$$

1. Écrire une fonction informatique qui calcule les sommes partielles de cette série. Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ et à la somme (en cas de convergence) ?
2. Répondre mathématiquement à la question précédente.

Exercice 5 (C3-C4)  On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, 1[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 6 (C1-C2-C4)  On considère l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = -e^{-x}$ notée (E) .

1. Déterminer l'ensemble de solutions de (E) sachant qu'une solution particulière est de la forme $y_p : x \mapsto a x e^{-x}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Étant donnée une solution y de (E) , déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante la série $\sum_{n \geq 0} y(n)$ est convergente et calculer sa somme dans ce cas.

Exercice 7  Pour tout entier naturel N non nul, on pose $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$.

- 1.(a) Écrire une fonction `somme` en langage `python` qui prend en argument un entier naturel N non nul et qui renvoie la valeur de S_N .
- (b) Avec cette fonction, calculer S_2 , S_4 et S_6 et conjecturer le sens de variations de la suite $(S_{2N})_{N \geq 1}$.
2. Montrer que les suites $(S_{2N})_{N \geq 1}$ et $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
3. Écrire une fonction `valeurapprochee` qui prend en argument un nombre réel `eps` strictement positif et renvoie la plus petite valeur de N et la valeur de S_N correspondante telles que $|S_N - S_{N+1}| < \varepsilon$.
4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{N-1} (-x)^k = \frac{1}{1+x} - (-1)^N \frac{x^N}{1+x}$$

5. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 8 (C3)  Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

1. Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2, \quad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \arctan \left(\frac{1}{n} \right) - \arctan \left(\frac{1}{n+1} \right) = \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ et calculer sa somme en cas de convergence.

Exercice 9 (C1-C3-C5) 

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(1 - 1/n^2)$ converge.
2. Calculer la somme de cette série.

Exercice 10 (C4)  Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad u_n = u_{n-1} + \frac{u_{n-2}}{n \ln(n)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
2. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln(x)} \leq \frac{1}{k \ln(k)}$$

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}$$

4. Déterminer alors un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$?
5. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad u_n - u_{n-1} \geq \frac{c}{n \ln(n)}$$

6. Conclure quant à la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 11 (C3-C4)  1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On étudie dans cette question la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_p = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^\alpha}$.

- (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt$$

- (b) Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ suivant la valeur de α .
- (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ suivant la valeur de α .

2. Déterminer un équivalent simple du terme général de la série ci-dessous puis étudier la nature de cette série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Exercice 12 (C4) ☞ On pose, pour tout n entier naturel non nul, $v_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n}$ et $\delta_n = \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$.

1. Déterminer un développement limité en la variable $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2 de δ_n .
2. En déduire un équivalent de δ_n .
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \delta_n$.
4. Conclure alors que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite strictement positive.

Exercice 13 (C1-C2-C3) ☞ Soit $q \in]-1, 1[$. Pour tout entier naturel k non nul on considère la propriété :

$$\mathcal{P}_k : \text{« la série } \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} q^{n-k} \text{ converge et } \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{n-k} = \frac{1}{(1-q)^{k+1}} \text{ »}$$

On va montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k , la proposition $\mathcal{P}_k$ est vraie.

1. Montrer que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la proposition $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Pour tout entier $p \geq k+1$, on pose $S_p = \sum_{n=k+1}^p \binom{n}{k+1} q^{n-(k+1)}$.

- (a) Montrer que, pour tout $p \geq k+1$, on a :

$$(1-q) S_p = -\binom{p}{k+1} q^{p-k} + \sum_{n=k}^{p-1} \binom{n}{k} q^{n-k}$$

- (b) Montrer la suite $\left(\sum_{n=k}^{p-1} \binom{n}{k} q^{n-k} \right)_{p \geq k+1}$ converge et déterminer sa limite.
- (c) Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \binom{p+1}{k+1} q^{p+1-k} = 0$.
- (d) Conclure.

Exercice 14  On sait que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente. On veut calculer la somme de cette série. Pour tout $t \in [0, \pi]$, on pose :

$$f(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{f(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{si } t \neq 0$$

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement (que l'on note encore g) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

Indication : pour les études en 0, on utilisera des développements limités.

2. Pour tout entier naturel k non nul, calculer l'intégrale $\int_0^\pi f(t) \cos(kt) dt$.

- 3.(a) Démontrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

- (b) Soient $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times]0, \pi]$. Montrer l'égalité :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

4. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0$$

5. En utilisant les questions précédentes, en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.