

Chapitre 1

Séries numériques

1 Série numérique

1.1 Qu'est-ce qu'une série numérique ?

Définition 1.1.1. Soit (u_n) une suite réelle. La série de terme général u_n est la suite des sommes partielles (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Exemple 1.1.1.

Déterminer les sommes partielles des séries dont les termes généraux sont indiqués ci-dessous :

1. $\forall n \geq 0, u_n = 1$

Soit $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$

2. $\forall n \geq 1, u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Soit $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$$= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k)$$

$$= \sum_{\ell=2}^{n+1} \ln(\ell) - \sum_{k=1}^n \ln(k)$$

$$= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

3. $\forall k \geq 0, u_k = q^k$ pour $q \in]-1, 1[$

Soit $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

4. $\forall k \geq 0, u_k = k$

Soit $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque 1.1.1. Pour la plupart des séries, il n'est pas possible de calculer explicitement leurs sommes partielles. C'est par exemple le cas de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Définition 1.1.2 (Nature de la série).

Si la suite (S_n) converge vers ℓ , on dit que la série $\sum u_k$ converge et on écrit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \ell.$$

On peut alors définir le reste d'ordre n de la série par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Remarque 1.1.2. La convergence de la série ne dépend pas des premiers termes de la suite (u_n) , mais la somme de la série, oui.

Exemple 1.1.2.

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 0} 1$ Pour $n \geq 0$, $S_n = n+1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

donc la série de terme général 1 diverge.

2. $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Pour $n \geq 0$, on a $S_n = \ln(n+1)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Ainsi la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

3. $\sum_{k \geq 0} q^k$ pour $q \in]-1, 1[$

Pour $n \geq 0$, $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et $-1 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$.

Ainsi, la série de terme général q^k converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$.

4. $\sum_{k \geq 0} k$ Pour $n \geq 0$, on a $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Ainsi la série de terme général k diverge.

1.2 La divergence grossière

Théorème 1.2.1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

On note pour $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La série de terme général u_n converge donc il existe $l \in \mathbb{R}$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$.

Soit $n \geq 1$, on calcule $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$.

On passe à la limite $n \rightarrow +\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l - l = 0$.

□

La réciproque est fausse.

On verra plus tard que la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente.

Corollaire 1.2.2. Divergence grossière

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 1.2.1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n(3n+1)\sqrt{n-1}}{(n-\pi)(n+e)}$.

On remarque que $u_n \sim \frac{n \times 3n \times \sqrt{n}}{n \times n}$ donc $u_n \sim 3\sqrt{n}$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$.

On en déduit que la série de terme général u_n est grossièrement divergente.

1.3 Opérations sur les séries

Proposition 1.3.1.

Si deux séries de termes généraux u_n et v_n convergent, avec $\sum u_n = \ell$ et $\sum v_n = \ell'$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge, de somme $\lambda \ell + \mu \ell'$.

2 Les séries usuelles

2.1 La série harmonique

Théorème 2.1.1. Série harmonique

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Démonstration. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

On intègre l'inégalité et par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \Leftrightarrow \boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}}$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq S_n$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on additionne les inégalités de la question 1 pour $k \in [1, m]$:

$$\sum_{k=1}^m \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \Leftrightarrow \int_1^{m+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \text{ par relation de Chasles}$$

$$\Leftrightarrow [\ln(t)]_1^{m+1} \leq S_m$$

$$\Leftrightarrow \ln(m+1) - \ln(1) \leq S_m$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ln(m+1) \leq S_m}$$

3. Conclure quant à la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

On remarque que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \ln(m+1) = +\infty$, or $\forall m \geq 1$, $\ln(m+1) \leq S_m$

donc par thm de comparaison, $\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = +\infty$. □

Ainsi la série harmonique est divergente

2.2 La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

Théorème 2.2.1. Série des $1/n^2$
La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Remarque 2.2.1. (résultats hors programme)

- La somme de cette série vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- De manière générale, les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées les séries de Riemann et elles convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, calculer la somme $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.

→ Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, déterminons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} = \frac{1}{k(k-1)} \Leftrightarrow \frac{a(k-1) + bk}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)k - a}{k(k-1)} = \frac{0k + 1}{k(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

donc $\frac{1}{k(k-1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}$

→ Pour $n \geq 2$, on pose $T_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.

$$T_n = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) = - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1}$$

$$= - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \text{ en posant } j = k-1$$

$T_n = -\frac{1}{n} + 1$

2. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

Soit $k \geq 2$, on a $k^2 \geq k^2 - k$ car $k \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \text{ car la fonction inverse est décroissante sur }]0, +\infty[.$$

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq 2$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on additionne les inégalités de la question 2 pour $k \in [2, m]$:

$$\sum_{k=2}^m \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^m \frac{1}{k(k-1)} \Leftrightarrow S_m - 1 \leq T_m \Leftrightarrow S_m \leq T_{m+1} \Leftrightarrow S_m \leq 1 - \frac{1}{m+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow S_m \leq 2 - \frac{1}{m+1} \leq 2 \text{ donc } \boxed{S_m \leq 2}.$$

4. Conclure quant à la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Soit $n \geq 1$, $S_{m+n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(n+k)^2} \geq 0$ donc (S_n) est croissante.

De plus, par question 3, (S_n) est majorée par 2. Par thm de convergence monotone, on en déduit que (S_n) est convergente vers une limite finie l .

Ainsi la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

□

2.3 Séries géométriques

Théorème 2.3.1. Série géométrique

La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

→ Cas $q = 1$:

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc la $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ est divergente.

→ Cas $q \neq 1$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Si $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

Ainsi, la $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Si $q > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Ainsi, la $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ diverge.

Si $q < -1$, la suite $(q^{n+1})_{n \geq 0}$ n'a ni limite, pas de

limite, donc $(S_n)_{n \geq 0}$ non plus.

Ainsi, la $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ diverge.

□

Exemple 2.3.1. La série de terme général $u_n = \frac{2}{3^n}$ est-elle convergente ?

On remarque que $\forall n \geq 0, u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$, donc la série de terme général serait de terme général non convergente comme série géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, $-1 < q < 1$.

Théorème 2.3.2.

1. **Série géométrique dérivée première :** La série de terme général nq^{n-1} converge si et seulement si $|q| < 1$ et ~~on a dans ce cas~~

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

2. **Série géométrique dérivée seconde :** La série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et ~~on a dans ce cas~~

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Démonstration.

On considère q comme la variable d'une fonction, $q \in]-1, 1[$.

Par linéarité de la dérivée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} = - \frac{-1}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

On dérive une deuxième fois :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2} = - \frac{-2}{(1-q)^3} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

□

Exemple 2.3.2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{2^n}$ et calculer sa somme.

Soit $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

$$\begin{aligned} \text{On a } S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2+1}{2^k} = \sum_{k=0}^n \frac{k^2-k+k+1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1/2}^n k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=1/2}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \underbrace{\sum_{k=2}^n k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}} + \left(\frac{1}{2}\right) \underbrace{\sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k} \end{aligned}$$

On reconnaît des sommes partielles de séries géométriques, géométrique d'ordre première et géométrique d'ordre seconde de raison $q = \frac{1}{2}$, $-1 < q < 1$, donc convergentes.

Ainsi, $(S_n)_{n \geq 0}$ converge, donc la série de u_n converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 + 2 + 2 = 8$$

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 8$

2.4 Série exponentielle

Théorème 2.4.1. Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exemple 2.4.1. La série de terme général $u_n = \frac{n+1}{n!}$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut sa somme ?

Soit $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{on pose } k \geq 1, \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{avec } j = k-1$$

On reconnaît des sommes partielles de séries exponentielles de paramètre $x=1$, donc convergentes.

Ainsi la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est convergente, et donc la $\sum_{k \geq 0} k u_k$ converge.

$$\text{De plus, } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^1 + e^1 = 2e.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 2e$$

2.5 Séries télescopiques

Proposition 2.5.1. Série télescopiques

Pour déterminer la nature d'une série dont le terme général est du type

$$u_n = a_{n+1} - a_n$$

on explicite la somme partielle d'ordre n en utilisant le télescopage des sommes.

Exemple 2.5.1. On pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

- Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)} = \frac{0n+1}{n(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

- Montrer la convergence de la série de terme général u_n et calculer sa somme.

$$\text{Soit } n \geq 1, \text{ on pose } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \text{ en posant } j = k+1 \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

donc la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

Méthode 2.1.

Pour déterminer la nature d'une série de terme général u_n et calculer sa somme, on peut :

- Reconnaître une combinaison linéaire de séries usuelles :

- si le terme général u_n comporte du q^n , on reconnaît une série géométrique ou une de ses dérivées.
- si le terme général u_n comporte du $\frac{1}{n!}$, on reconnaît une série exponentielle, à un potentiel changement d'indice près.
- si le terme général est en $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n^2}$, on reconnaît une série usuelle mais on ne pourra pas a priori calculer sa somme.

- Faire apparaître une somme télescopique et expliciter sa somme partielle d'ordre n avant de passer à la limite $n \rightarrow +\infty$.

3 Convergence des séries à termes positifs.

3.1 Critère de comparaison des séries à termes positifs

Définition 3.1.1. La série de terme général u_n est dite à **termes positifs** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Théorème 3.1.1 (Critère de comparaison des séries à termes positifs).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'il existe un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

1. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
2. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 3.1.1.

1. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{2 + \sin(n)}{3^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \sin(n) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} \leq u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

La I de $\text{ty } 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge comme série géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, $-1 < q < 1$.

De plus, $\forall n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$, donc par critère de comparaison des séries à

termes positifs, la I de $\text{ty } u_n$ converge.

2. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1 + e^{-n}}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-n} > 0 \Leftrightarrow \frac{1 + e^{-n}}{n} > \frac{1}{n} > 0$

La série de $\text{ty } \frac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq u_n$, donc par critère de comparaison des séries à termes

positifs, la I de $\text{ty } u_n$ diverge.

3.2 Critère des équivalents des séries à termes positifs

Théorème 3.2.1 (Critère des équivalents des séries à termes positifs).

Si deux suites positives (u_n) et (v_n) sont équivalentes, les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Exemple 3.2.1. 1. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On remarque que $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

De plus, $\forall n \geq 1, \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$.

La série de $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Ainsi, par critère des équivalents des séries à termes positifs, la $\sum$ de $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

2. Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ avec $n \geq 1$.

On remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \\ &\sim -\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, $u_n = -v_n$. On a $0 < \cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1 \Leftrightarrow u_n \leq 0 \Leftrightarrow v_n \geq 0$.

De plus $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

La $\sum$ de $\frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, par critère des équivalents des séries à termes positifs,

la $\sum$ de u_n converge.

Par conséquent, la $\sum$ de v_n converge.

4 Convergence absolue.

Définition 4.0.1. La série de terme général u_n est dite **absolument convergente** si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Théorème 4.0.1. La convergence absolue entraîne la convergence.

Démonstration.

$$\text{On définit les suites } u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n^+ \geq 0 \\ u_n^- \geq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \end{cases}, \text{ donc par thm de comparaison des séries à} \\ \text{termes positifs, les } \sum u_n^+ \text{ et } \sum u_n^- \text{ convergent.}$$

termes positifs, les $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_n^+ - u_n^-$, donc la $\sum$ de u_n converge comme combinaison linéaire de séries convergentes.

□

Remarque 4.0.1. Attention, la réciproque est fausse, il existe des séries convergentes sans être absolument convergentes.

Méthode 4.1.

Pour démontrer qu'une série de terme général u_n qui change de signe converge, on peut essayer de démontrer que la série est absolument convergente.

Exemple 4.0.1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$.

$$\text{On pose, pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad \tilde{u}_n = |u_n| \geq 0.$$

$$\text{On a pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \tilde{u}_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

La $\sum$ de $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs,

la $\sum$ de $\tilde{u}_n$ converge.

La série de u_n est absolument convergente, donc convergente.