
TD 4 - Polynômes

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Déterminer les racines d'un polynôme
- ▷ C2 : Déterminer la multiplicité des racines d'un polynôme
- ▷ C3 : Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$
- ▷ C4 : Déterminer le degré d'un polynôme et les propriétés liées

Exercice 1 (C1-C3)  1. Écrire un script en langage `python` qui demande à l'utilisateur trois nombres réels a , b et c (avec a non nul) et qui renvoie les racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Le nombre complexe i s'écrit `1j` sous `python`. Il est disponible dans le module `cmath`.

2. Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes suivants :

(a) $P = X^2 + X - 2$

(b) $Q = X^3 + 3X^2 - 20$

(c) $R = X^3 + X^2 + X + 1$

(d) $S = X^3 - 1$

(e) $T = X^4 + X^2 + 1$

(f) $U = X^5 - 32$

(g) $V = X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 8X + 12$

Indication : pour le polynôme V , on pourra utiliser le fait qu'il admet une racine imaginaire pure.

Exercice 2 (C1)  Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1 + x_2 + x_3$.

Exercice 3 (C4)  Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0) = 0$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(\sin(x))$. Montrer que P est le polynôme nul.

Exercice 4 (C2)  Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $Q = \frac{1}{2}(X - a)(P' + P'(a)) - P + P(a)$. Montrer que a est une racine d'ordre au moins 3 de Q .

Exercice 5 (C1-C3)  On considère le polynôme $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$.

1. Montrer que $z_1 = 1 + i$ est racine de P .
2. En déduire toutes les racines complexes, puis toutes les racines réelles de P .

Exercice 6 (C2-C4)  Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On pose $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

1. Démontrer qu'il existe des valeurs de a et b pour lesquelles 1 est une racine au moins double de P .
2. Pour ces valeurs de a et b , montrer alors que $P = (X - 1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.

Exercice 7 (C1-C2-C3-C4)  1. Soit P un polynôme à coefficients réels noté

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ (où } n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Montrer que si ω est une racine complexe de P , alors $\bar{\omega}$ est aussi une racine de P .

2. On définit le polynôme $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Déterminer le degré de P et son coefficient dominant.
- En trouver deux racines évidentes.
- Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que j est racine multiple de P . En déduire une autre racine multiple ainsi que la multiplicité de ces deux racines de P .
- En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8 (C1-C3-C4)  Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on pose $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

- Montrer que les nombres $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ sont des racines deux à deux distinctes de P puis en déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
 - Proposer un programme informatique qui permet de vérifier que $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ sont racines de P .
- Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déterminer la forme exponentielle de $1 - e^{i\theta}$.
 - Déduire de ce qui précède la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
 - Écrire une fonction `python` qui prend en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la valeur du produit précédent.

Exercice 9 (C1-C2-C4, oral G2E)  Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et par $P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Écrire une fonction `polynome` qui prend en entrée un entier n , un nombre réel x , et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.
- Calculer P_2 , P_3 et P_4 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le monôme de plus haut degré du polynôme P_n .
- Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le nombre $\alpha_k = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ est racine de P_n . Ces racines sont-elles deux à deux distinctes ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 10 (C4)  On considère l'équation différentielle du second degré :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ty''(t) - 2y'(t) + 4y(t) = 4t^4 + 12t - 6.$$

Déterminer un polynôme P solution de cette équation.