

Fiche de révision 4 - Correction

Nombres complexes, trigonométrie et polynômes

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Utiliser les écritures algébrique et exponentielle d'un nombre complexe
- ▷ C2 : Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe, utiliser les propriétés associées
- ▷ C3 : Utiliser les formules d'Euler, la formule de Moivre, caractérisation des nombres réels et des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison
- ▷ C4 : Utiliser la technique de l'angle moitié
- ▷ C5 : Utiliser l'inégalité triangulaire
- ▷ C6 : Linéariser une fonction
- ▷ C7 : Résoudre des (in)équations trigonométriques, réduction de $a \cos(x) + b \sin(x)$ en $R \cos(x + \varphi)$
- ▷ C8 : Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, déterminer les racines d'un polynôme et leur multiplicité
- ▷ C9 : Déterminer le degré d'un polynôme et les propriétés liées

2 Correction des exercices

Exercice 1 (C1-C2-C3-C4)  Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes z suivants. On discutera suivant les valeurs des nombres réels α et β dans les questions 10. et 12.

[Quelques commentaires pour commencer.](#)

COMMENTAIRE

- Pour chacun des nombres complexes, on factorise par le module et on fait ainsi apparaître un nombre complexe de module 1. Il faut alors reconnaître *un* argument associé. Rappelons qu'il n'y a pas unicité de l'argument (*cf.* modulo 2π).
- Pour les nombres complexes de la forme $e^{i\theta} \pm e^{-i\theta'}$, on utilise la technique de l'angle moitié (et donc les formules d'Euler).

1. $z = 7$
 $z = 7e^{i0}$
2. $z = -3$
 $z = 3e^{i\pi}$
3. $z = 3i$
 $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$
4. $z = -1 + i\sqrt{3}$
 $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
5. $z = 2 - 2i$
 $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
6. $z = -4i$
 $z = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$
7. $z = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}$

On factorise par $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et on utilise la technique de l'angle moitié (et au passage la formule d'Euler pour le sinus) pour obtenir :

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}} \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}} \right) = -2i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}} = \underbrace{2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}_{>0} e^{-i\frac{3\pi}{8}} \quad \text{car} \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

8. $z = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

En factorisant par $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et en utilisant encore la technique de l'angle moitié, on obtient :

$$z = \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

9. $z = e^{i\alpha} + 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$z = e^{i\alpha} + e^{i0} = \dots = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

On distingue trois cas.

- **Premier cas :** $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$.

Dans ce cas, $z = 0$ et donc z n'admet pas de forme exponentielle.

- **Deuxième cas :** $\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[$.

Ici, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ et donc la forme exponentielle de z est $z = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

- **Troisième cas :** $\alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[$.

Dans ce dernier cas, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$. La forme exponentielle de z est donc $z = -2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i(\pi + \frac{\alpha}{2})}$ en utilisant le fait que $e^{i\pi} = -1$ et car $-2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$.

COMMENTAIRE

Pour trouver les différents cas à traiter, on résout l'inéquation $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$.

10. $z = e^{i\alpha} - e^{i\beta}$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors (formule d'Euler du sinus) :

$$z = 2i e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2 e^{i\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

On distingue trois cas.

- **Premier cas :** $\alpha = \beta \pmod{2\pi}$.

Alors $z = 0$ et donc z n'admet pas de forme exponentielle.

- **Deuxième cas :** $\alpha - \beta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]4k\pi, 2\pi + 4k\pi[$.

Ici, $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > 0$ et donc la forme exponentielle de z est $z = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}}$.

- **Troisième cas :** $\alpha - \beta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2\pi + 4k\pi, 4\pi + 4k\pi[$.

Dans ce dernier cas, $\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) < 0$. La forme exponentielle de z est donc $z = -2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta+3\pi}{2}}$.

11. $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ en élevant préalablement le nombre complexe au carré

On a $z^2 = 2\sqrt{2}(1+i) = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc $(z - 2e^{i\frac{\pi}{8}})(z + 2e^{i\frac{\pi}{8}}) = 0$ et donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $z = -2e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Mais $\operatorname{Re}(z) > 0$, on peut conclure que $z = 2e^{i\frac{\pi}{8}}$.

12. $z = \frac{e^{i\alpha} - 1}{ie^{i\beta} + 1}$ où ici $(\alpha, \beta) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ en justifiant d'abord que ce nombre complexe est bien défini. Soit $(\alpha, \beta) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[$. Alors $ie^{i\beta} + 1 = e^{i(\beta + \frac{\pi}{2})} + 1$. Le nombre complexe z existe donc si et seulement si $\beta + \frac{\pi}{2} \neq \pi \pmod{2\pi}$ c'est-à-dire si et seulement si $\beta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ce qui est vrai puisque $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On a de plus (formule d'Euler) :

$$e^{i\alpha} - 1 = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\pi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad ie^{i\beta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

et donc $z = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$. Il reste à déterminer le signe de $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$. On a $\frac{\alpha}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

donc $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$. De plus $\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$. Finalement, $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} > 0$ et

donc la forme exponentielle de z est
$$z = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Exercice 2 (C2)  1. Pour tout entier naturel n , déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = (1 - i\sqrt{3})^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La formule de Moivre nous donne $z = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}}$. Cette écriture est la forme exponentielle de z^n car $2^n > 0$ donc :

$$|z| = 2^n \quad \text{et} \quad \arg(z) = -\frac{n\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

COMMENTAIRE

On peut aussi calculer un argument et le module de z sans chercher sa forme exponentielle.

2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles z est un nombre réel.

On a :

$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0 \pmod{\pi} \iff -\frac{n\pi}{3} = 0 \pmod{\pi} \iff n = 0 \pmod{3}$$

Autrement dit :

z est un nombre réel si et seulement si n est un multiple de 3

Exercice 3 (C3-C7)  Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (d'inconnue z) :

1. $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$

On commence par déterminer la forme exponentielle de $a = 1 - \sqrt{3}i$. On remarque que

$$a = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{-i\pi/3}$$

donc $|a| = 2$ et $\arg(a) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$. On obtient :

$$z^2 = a \iff r^2 e^{2i\theta} = 2e^{-i\pi/3} \iff \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \text{ car } r \geq 0 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi, on a deux solutions : $\boxed{z = \pm \sqrt{2}e^{-i\pi/6}}$.

2. $z^2 = 1 + i$

On commence par déterminer la forme exponentielle de $a = 1 + i$. On remarque que

$$a = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

donc $|a| = \sqrt{2}$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$. On obtient :

$$z^2 = a \iff r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \iff \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{\sqrt{2}} \text{ car } r \geq 0 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi, on a deux solutions : $\boxed{z = \pm \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}}$.

Exercice 4 (C3) 

1. Soit z un nombre complexe de module 1. Exprimer $\bar{z}$ en fonction de z .

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Alors $|z|^2 = 1$, c'est-à-dire $z\bar{z} = 1$. Par conséquent, $\boxed{\bar{z} = \frac{1}{z}}$.

2. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $ac \neq -1$. Montrer que le nombre complexe $z = \frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ est un imaginaire pur.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $|a| = |b| = |c| = 1$ et $ac \neq -1$. Le nombre complexe z est alors bien défini (car on a aussi $b \neq 0$) et il suffit de vérifier que $\bar{z} = -z$ pour montrer que $z \in i\mathbb{R}$. En utilisant les propriétés (multiplicatives et additives) de la conjugaison, il vient :

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)} \right)} = \frac{\overline{(c-b)(1+ab)}}{\overline{b(1+ac)}} = \frac{(\bar{c}-\bar{b})(1+\bar{a}\bar{b})}{\bar{b}(1+\bar{a}\bar{c})}$$

Or a, b et c sont de module 1 donc $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$ et $\bar{c} = \frac{1}{c}$. En remplaçant et en multipliant par abc au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\bar{z} = \frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{ab}\right)}{\frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{ac}\right)} = \frac{\frac{b-c}{bc} \times \frac{ab+1}{ab}}{\frac{ac+1}{abc}} = \frac{(b-c)(ab+1)}{b(ac+1)} = -\frac{(c-b)(ab+1)}{b(ac+1)} = -z$$

Finalement, $\boxed{z \text{ est un nombre complexe imaginaire pur}}$.

Exercice 5 (C1-C2-C3-C7)  On note j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de j .

On a $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2. Calculer j^3 et $j^2 + j + 1$.

En utilisant la formule de Moivre, il vient $j^3 = e^{i2\pi} = 1$ et :

$$j^2 + j + 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$$

3. Vérifier que pour tout nombre complexe z , on a l'égalité :

$$(z+1)(z+j)(z+j^2) = (1+z)(1+jz)(1+j^2z)$$

On peut tout à fait développer les deux expressions pour constater qu'on obtient la même chose.

On peut aussi remarquer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (1+jz)(1+j^2z) = j\left(\frac{1}{j} + z\right)j^2\left(\frac{1}{j^2} + z\right)$$

Or on sait que $j^3 = 1$ donc $\frac{1}{j} = j^2$ et $\frac{1}{j^2} = j$. Ainsi :

$$(1+jz)(1+j^2z) = (j^2 + z)(j + z)$$

et finalement :

$$(z+1)(z+j)(z+j^2) = (1+z)(1+jz)(1+j^2z)$$

4. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} j & j^2 \\ j & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est inversible et déterminer son inverse.

On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} j & j^2 \\ j & -1 \end{vmatrix} = -j - j^3 = -j - 1 = -j^2 \neq 0$$

donc la matrice M est inversible d'inverse $M^{-1} = -\frac{1}{j^2} \begin{pmatrix} -1 & -j^2 \\ -j & j \end{pmatrix}$. Or $\frac{1}{j^2} = j$ donc :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} j & 1 \\ j^2 & -j^2 \end{pmatrix}$$

COMMENTAIRE

Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. On résout l'équation $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = X & L_1 \\ x + jy + j^2 z = Y & L_2 \\ x + j^2 y + jz = Z & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = X & L_1 \\ (j-1)y + (j^2-1)z = -X+Y & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (j-1)(j+1)y + (j-1)z = -X+Z & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

On peut faire l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - (j+1)L_2$. On a :

$$(j-1) - (j+1)(j^2-1) = (j-1)(1 - (j+1)^2) = (j-1)(1-j) = \dots = 3j$$

donc :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = X & L_1 \\ (j-1)y + (j^2-1)z = -X+Y & L_2 \\ 3jz = jX - (j+1)Y + Z & L_3 \leftarrow L_3 - (j+1)L_2 \end{cases}$$

En utilisant le fait que $j+1 = -j^2$ et que $\frac{1}{j} = j^2$, on obtient :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = X \\ (j-1)y + (j^2-1)z = -X+Y \\ z = \frac{1}{3}X + \frac{j}{3}Y + \frac{j^2}{3}Z \end{cases}$$

Exercice 6 (C1-C3)  Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\theta)$ est convergente et calculer sa somme. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(k\theta)$.

- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \text{Re}(T_n)$ où $T_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de la partie réelle (cf. commentaire), on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(k\theta) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{Re}(e^{ik\theta}) = \text{Re}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{ik\theta}\right) \quad \text{car } \left(\frac{1}{2}\right)^k \in \mathbb{R}$$

puis (par linéarité de la partie réelle encore) :

$$S_n = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{ik\theta}\right) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k\right)$$

d'après la formule de Moivre.

- (a) Démontrer que :

$$\frac{1}{2 - e^{i\theta}} = \frac{2 - e^{-i\theta}}{5 - 4\cos(\theta)}$$

On a :

$$\frac{1}{2 - e^{i\theta}} = \frac{2 - e^{-i\theta}}{(2 - e^{i\theta})(2 - e^{-i\theta})} = \frac{2 - e^{-i\theta}}{5 - 4\cos(\theta)}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de T_n puis établir que :

$$S_n = \frac{1}{5 - 4 \cos(\theta)} \left(4 - 2 \cos(\theta) - \frac{\cos((n+1)\theta)}{2^{n-1}} + \frac{\cos(n\theta)}{2^n} \right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme T_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{e^{i\theta}}{2} \neq 1$ (le module valant $1/2$) on a (en utilisant la formule de Moivre) :

$$T_n = \left(1 - \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n+1}} \right) \frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}} = \left(2 - \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^n} \right) \frac{1}{2 - e^{i\theta}}$$

En développant, on obtient :

$$T_n = \frac{1}{5 - 4 \cos(\theta)} \left(4 - 2 e^{-i\theta} - \frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n-1}} + \frac{e^{in\theta}}{2^n} \right)$$

dont la partie réelle vaut :

$$S_n = \frac{1}{5 - 4 \cos(\theta)} \left(4 - 2 \cos(\theta) - \frac{\cos((n+1)\theta)}{2^{n-1}} + \frac{\cos(n\theta)}{2^n} \right)$$

3. Conclure quant à la convergence de la série et à la valeur de sa somme.

En utilisant le théorème des gendarmes (on encadre chacun des cosinus entre -1 et 1), on montre que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos((n+1)\theta)}{2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n} = 0$$

Par somme, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente de limite $\frac{4 - 2 \cos(\theta)}{5 - 4 \cos(\theta)}$. Autrement dit :

la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\theta)$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\theta) = \frac{4 - 2 \cos(\theta)}{5 - 4 \cos(\theta)}$
--

COMMENTAIRE

- On peut tout à fait démontrer la convergence de la série en observant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\theta) \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On sait que la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente puisque $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. On utilise ensuite le critère de convergence des séries à termes positifs et le fait qu'une série absolument convergente est convergente. Ceci serait ici une perte de temps car il est demandé de calculer la somme de la série. Il est donc préférable de calculer directement les sommes partielles de la série pour conclure quant à la convergence de la série et à la valeur de la somme.

- La partie réelle (la partie imaginaire aussi) sont des applications $\mathbb{R}$ -linéaires, ce qui signifie que :

$$\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, \forall (\lambda, \mu) \in \boxed{\mathbb{R}^2}, \quad \operatorname{Re}(\lambda z + \mu w) = \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(w)$$

C'est faux si on prend des scalaires complexes. Du coup, le fait que la puissance de $\frac{1}{2}$ soit réelle est ici essentielle.

Exercice 7 (C3-C7) 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que :

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(a\bar{b})$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$|a + b|^2 = (a + b)(\overline{a + b}) = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) = a\bar{a} + a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{b} = |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b + |b|^2$$

Or on sait que pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a $w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w)$ donc $a\bar{b} + \bar{a}b = 2 \operatorname{Re}(a\bar{b})$. Finalement :

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad |a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(a\bar{b})}$$

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Démontrer l'équivalence :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\bar{a}} \right\}, \quad \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1 \iff |z| < 1$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\bar{a}} \right\}$. La fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1 \iff \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 < 1 \iff \frac{|z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} < 1 \iff |z - a|^2 < |1 - \bar{a}z|^2$$

car $|1 - \bar{a}z|^2 > 0$. En utilisant la question 1. et le fait que $|\bar{a}| = |a|$, il vient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1 &\iff |z|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{a}) + |a|^2 < 1 - 2 \operatorname{Re}(\bar{a}z) + |\bar{a}z|^2 \\ &\iff |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2 |z|^2 \\ &\iff (1 - |a|^2) |z|^2 < 1 - |a|^2 \\ &\iff |z|^2 < 1 \\ &\iff |z| < 1 \end{aligned}$$

car $1 - |a|^2 > 0$ (puisque $|a| < 1$) puis par stricte croissance de la fonction racine carré sur $\mathbb{R}_+$. Finalement :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\bar{a}} \right\}, \quad \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1 \iff |z| < 1}$$

Exercice 8 (C3-C8) 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 \iff x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$$

En posant $X = x^2$, on a :

$$\begin{aligned} 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0 &\iff 16X^2 - 20X + 5 = 0 \iff X = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ ou } X = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \\ &\iff x = \pm \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = \pm \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

car les deux valeurs obtenues pour X sont positives. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ 0, \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \right\}}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(5x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sin(5x) = 0 \iff 5x = 0 \pmod{\pi} \iff x = 0 \pmod{\frac{\pi}{5}}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- (a) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\operatorname{Im}(e^{i5x}) = 5 \cos(x)^4 \sin(x) - 10 \cos(x)^2 \sin(x)^3 + \sin(x)^5$$

D'après les formules de Moivre et du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} e^{i5x} &= (e^{ix})^5 \\ &= (\cos(x) + i \sin(x))^5 \\ &= \cos(x)^5 + 5i \cos(x)^4 \sin(x) - 10 \cos(x)^3 \sin(x)^2 - 10i \cos(x)^2 \sin(x)^3 + 5 \cos(x) \sin(x)^4 + i \sin(x)^5 \end{aligned}$$

ce qui donne bien, en prenant la partie imaginaire :

$$\operatorname{Im}(e^{i5x}) = 5 \cos(x)^4 \sin(x) - 10 \cos(x)^2 \sin(x)^3 + \sin(x)^5$$

- (b) Exprimer $\sin(5x)$ comme combinaison linéaire de puissances de $\sin(x)$.

On sait que $\operatorname{Im}(e^{i5x}) = \sin(5x)$. De plus, $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ donc :

$$\begin{aligned} \sin(5x) &= 5(1 - \sin(x)^2)^2 \sin(x) - 10(1 - \sin(x)^2) \sin(x)^3 + \sin(x)^5 \\ &= 5(1 - 2\sin(x)^2 + \sin(x)^4) \sin(x) - 10\sin(x)^3 + 10\sin(x)^5 + \sin(x)^5 \end{aligned}$$

d'où :

$$\sin(5x) = 5 \sin(x) - 20 \sin(x)^3 + 16 \sin(x)^5$$

4. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Posons $x = \frac{\pi}{5}$ et $X = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Alors $\sin(5x) = \sin(\pi) = 0$. D'après la question 3.(b), on a alors $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$. Autrement dit, X est solution de l'équation de la question 1. ce qui implique que :

$$X \in \left\{ 0, \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \right\}$$

Comme $\frac{\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, on a $0 < X < \frac{1}{2}$. De plus, $5 + \sqrt{5} > 2$ donc $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$. Par élimination, il reste donc :

$$X = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 9 (C7)  Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

On note $\mathcal{S}$ chacun des ensembles de solutions.

1. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On trouve $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On trouve $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} &\iff x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \\ &\iff x = 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. $-\cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) = 1$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} -\cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) &= 2 \left(-\frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3t) \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(3t) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(3t) \right) \\ &= 2 \cos\left(3t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) = 1 &\iff \cos\left(3t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ &\iff 3t - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \text{ ou } 3t - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \\ &\iff t = \frac{\pi}{3} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } t = \frac{\pi}{9} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(x) \geq \frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

Donc $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$.

6. $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

On trouve $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right]$.

7. $\sin(2t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

On trouve $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{9\pi}{8} + k\pi \right]$.

8. $\cos(2\theta) + \sin(2\theta) > \sqrt{\frac{3}{2}}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + \sin(2\theta) &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\theta) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos(2\theta) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(2\theta) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + \sin(2\theta) > \sqrt{\frac{3}{2}} &\iff \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta - \frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right[\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta \in \left] \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \right[\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta \in \left] \frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} + k\pi \right[\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} + k\pi \right[$.

9. $\tan(x) \leq 1$

On trouve $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[\right)$.

10. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1$

On trouve $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right[\right)$.

11. $\cos(x) + \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

On trouve $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

12. $\cos(x)^2 - \frac{\sin(2x)}{2} = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 - \frac{\sin(2x)}{2} = 0 &\iff \cos(x)^2 - \sin(x) \cos(x) = 0 \iff \cos(x)(\cos(x) - \sin(x)) = 0 \\ &\iff \dots \\ &\iff \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0\end{aligned}$$

On trouve $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

COMMENTAIRE

Il est fortement conseillé de s'aider d'un cercle trigonométrique pour trouver les lieux des points solutions.

Exercice 10 (C6) Les trois questions sont indépendantes.

1. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\sin(t)^4$

Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la formule d'Euler pour le sinus, $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$. D'après la formule du binôme de Newton et la formule de Moivre, on a :

$$\begin{aligned}\sin(t)^4 &= \frac{(e^{it} - e^{-it})^4}{16} = \frac{e^{i4t} - 4e^{i2t} + 6 - 4e^{-i2t} + e^{-i4t}}{16} \\ &= \frac{(e^{i4t} + e^{-i4t}) - 4(e^{i2t} + e^{-i2t}) + 6}{16}\end{aligned}$$

Puis, en appliquant à nouveau la formule d'Euler (pour le cosinus cette fois) :

$$\boxed{\sin(t)^4 = \frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{3}{8}}$$

(b) $\cos(2t)\sin(3t)$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Le principe est toujours le même (formules d'Euler et parfois le binôme de Newton) :

$$\begin{aligned}\cos(2t)\sin(3t) &= \frac{(e^{i2t} + e^{-i2t})(e^{i3t} - e^{-i3t})}{4i} \\ &= \frac{(e^{i5t} - e^{-i5t}) + (e^{it} - e^{-it})}{4i} \\ &= \frac{\sin(5t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}\end{aligned}$$

(c) $\cos(2t)\cos(t)^2$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On trouve :

$$\cos(2t)\cos(t)^2 = \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{4} + \frac{1}{4}$$

(d) $\cos(t)^5$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On trouve :

$$\cos(t)^5 = \frac{5\cos(t)}{8} + \frac{5\cos(3t)}{16} + \frac{\cos(5t)}{16}$$

2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos(x)^6$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par linéariser $\cos(x)^6$ et on trouve :

$$\cos(x)^6 = \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{3}{16}\cos(4x) + \frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{5}{16}$$

Une primitive de $x \mapsto \cos(x)^6$ sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$x \mapsto \frac{15}{64}\sin(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x) + \frac{1}{192}\sin(6x) + \frac{5x}{16}$$

3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi \sin(t)\cos(3t) dt$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On commence par linéariser $\sin(t)\cos(3t)$ et on obtient :

$$\sin(t)\cos(3t) = \frac{\sin(4t)}{2} - \frac{\sin(2t)}{2}$$

Par conséquent :

$$I = \left[-\frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{4} \right]_0^\pi = 0$$